Satslogik

Del 3

intro

I denna föreläsning definierar vi begreppen

- satslogisk konsekvens (giltighet),
- satslogisk ekvivalens

och visar hur sanningsvärdestabeller används för att avgöra om satslogisk konsekvens eller ekvivalens föreligger.

giltighet och satslogisk konsekvens

> Ett argument är giltigt om och endast om det inte finns någon möjlig situation i vilken alla argumentets premisser är sanna, men slutsatsen falsk.

För satslogiska argument kan denna idé om giltighet preciseras som satslogisk konsekvens.

För att definiera satslogisk konsekvens behöver vi begreppet simultan värdering.

simultana värderingar

En simultan värdering av ett antal satser anger sanningsvärdet för varje atomär sats som förekommer bland satserna.

(1) $P \to Q$

(2) $(P \vee Q) \wedge R$

Exempel. Tre atomära satser förekommer i ovanstående satser: P, Q och R.

Följande är en simultan värdering av satserna (1), (2): P är sann, Q är falsk, R är falsk.

Följande är inte en simultan värdering av satserna (1), (2): P är sann, Q är falsk. (Inget sanningsvärde tilldelas R.)

satslogisk konsekvens

En sats B är en satslogisk konsekvens av satserna $A_1, \ldots, A_n$, om och endast om: under alla simultana värderingar av $B, A_1, \ldots, A_n$ där satserna $A_1, \ldots, A_n$ är sanna, är också B sann.

Eller, med andra ord:[1]

En sats B är en satslogisk konsekvens av satserna $A_1, \ldots, A_n$, om och endast om det inte finns någon simultan värdering under vilken samtliga $A_1, \ldots, A_n$ är sanna men B är falsk.

[1] Med $A_1, \ldots, A_n$ menas en sekvens av n stycken satser. T.ex.: om $n = 3$, så är $A_1, \ldots, A_n = A_1, A_2, A_3$.

satslogisk konsekvens

Att B är en satslogisk konsekvens av $A_1, \ldots, A_n$ skrivs

$$A_1, \ldots, A_n \Rightarrow B.$$

Att B inte är en satslogisk konsekvens av $A_1, \ldots, A_n$ skrivs

$$A_1, \ldots, A_n \not\Rightarrow B.$$

Om $A_1, \ldots, A_n \Rightarrow B$ säger vi att argument på samma form är satslogiskt giltiga.

För att avgöra om $A_1, \ldots, A_n \Rightarrow B$ måste vi undersöka alla simultana värderingar under vilka $A_1, \ldots, A_n$ alla är sanna.

$P \to Q, P \Rightarrow Q$

P	Q	$P \to Q$	P	Q
S	S	S	S	S
S	F	F	S	F
F	S	S	F	S
F	F	S	F	F

Detta visar att Q är en satslogisk konsekvens av $P \to Q$, P, eller med andra ord, att *Modus ponens* är en satslogiskt giltig argumentsform.

$P \lor Q, \neg P \Rightarrow Q$

P	Q	$P \lor Q$	$\neg P$	Q
S	S	S	F	S
S	F	S	F	F
F	S	S	S	S
F	F	F	S	F

Detta visar att Q är en satslogisk konsekvens av $P \lor Q, \neg P$, eller med andra ord, att *Disjunktiv syllogism* är en satslogiskt giltig argumentsform.

motexempel

För att visa att satslogisk konsekvens inte föreligger—att $A_1, \ldots, A_n \not\Rightarrow B$—behöver vi hitta ett motexempel: en värdering där $A_1, \ldots, A_n$ alla är sanna, men B falsk.

Exempel: $P \to Q, Q \not\Rightarrow P$

P	Q	$P \to Q$	Q	P
S	S	S	S	S
S	F	F	F	S
F	S	S	S	F
F	F	S	F	F

Värderingen där P är falsk men Q sann utgör alltså ett motexempel mot att satslogisk konsekvens föreligger, dvs. är ett bevis för att satslogisk konsekvens inte föreligger ($\not\Rightarrow$).

$P \to Q, Q \vee R, \neg R \not\Rightarrow P$

P	Q	R	$P \to Q$	$Q \vee R$	$\neg R$	P
S	S	S	S	S	F	S
S	S	F	S	S	S	S
S	F	S	F	S	F	S
S	F	F	F	F	S	S
F	S	S	S	S	F	F
F	S	F	S	S	S	F
F	F	S	S	S	F	F
F	F	F	S	F	S	F

Värderingen där P, R är falska och Q sann utgör alltså ett motexempel, och visar därmed att $P \to Q, Q \vee R, \neg R \not\Rightarrow P$.

implikation och konsekvens

Materiell implikation ($\rightarrow$) är en svagare variant av satslogisk konsekvens ($\Rightarrow$).

$A \rightarrow B$ uttrycker att om A faktiskt är sann så är B faktiskt sann.

$A \Rightarrow B$ uttrycker att i varje logiskt möjlig situation där A är sann är B också sann.

Exempel. Satsen *Det är varmt* impliceras av satsen *Det brinner*, men är inte en satslogisk konsekvens av den.

$$\text{Det brinner} \;\rightarrow\; \text{Det är varmt}$$

$$\text{Det brinner} \;\not\Rightarrow\; \text{Det är varmt}$$

Sambandet är följande: En implikation ($A \rightarrow B$) är satslogiskt sann om och endast om högerledet är en satslogisk konsekvens av vänsterledet ($A \Rightarrow B$).

utvärdering av naturliga argument

Vi kan nu utvärdera naturliga argument med hjälp av satslogiken.

> *Jag kommer bara i tid till jobbet om tåget inte blir försenat. Om det inte är bra väder så blir tåget försenat. Det är inte bra väder, så jag kommer försent till jobbet.*

Vi börjar med att ställa upp på standardform:

1. Jag kommer bara i tid till jobbet om tåget inte blir försenat.
2. Om det inte är bra väder, så blir tåget försenat.
3. Det är inte bra väder.

---

4. Jag kommer försent till jobbet.

utvärdering av naturliga argument

1. Jag kommer bara i tid till jobbet om tåget inte blir försenat.
2. Om det inte är bra väder, så blir tåget försenat.
3. Det är inte bra väder.

---

4. Jag kommer försent till jobbet.

Vi översätter de ingående satserna till det satslogiska språket, och anger ett lexikon.

1. $P \rightarrow \neg Q$
2. $\neg R \rightarrow Q$
3. $\neg R$

---

4. $\neg P$

Lexikon. P: *Jag kommer i tid till jobbet*, Q: *Tåget blir försenat*, R: *Det är bra väder*.

utvärdering av naturliga argument

Lexikon. P: *Jag kommer i tid till jobbet*, Q: *Tåget blir försenat*, R: *Det är bra väder*.

P	Q	R	$P \to \neg Q$	$\neg R \to Q$	$\neg R$	$\neg P$
S	S	S	F	S	F	F
S	S	F	F	S	S	F
S	F	S	S	S	F	F
S	F	F	S	F	S	F
F	S	S	S	S	F	S
F	S	F	S	S	S	S
F	F	S	S	S	F	S
F	F	F	S	F	S	S

Detta visar att argumentet är giltigt: satslogisk konsekvens föreligger. När alla premisser är sanna, är slutsatsen sann.

satslogisk ekvivalens

Två satser är satslogiskt ekvivalenta om och endast om de har samma sanningsvärde under varje simultan värdering av dem.

Att A och B är satslogiskt ekvivalenta skrivs

$$A \Leftrightarrow B.$$

Att A och B inte satslogiskt ekvivalenta skrivs

$$A \not\Leftrightarrow B.$$

Exempel. För alla satser A, gäller att $A \Leftrightarrow \neg\neg A$. Följande visar detta:

A	$\neg$	$\neg$	A
S	S	F	S
F	F	S	F

$\neg(A \land B) \Leftrightarrow \neg A \lor \neg B$

A	B	$\neg$	$(A \land B)$	$\neg A$	$\lor$	$\neg B$
S	S	F	S	F	F	F
S	F	S	F	F	S	S
F	S	S	F	S	S	F
F	F	S	F	S	S	S

Detta visar att $\neg(A \land B)$ och $\neg A \lor \neg B$ är satslogiskt ekvivalenta: de har samma sanningsvärde under varje simultan värdering.

$A \to B \Leftrightarrow \neg A \vee B$

A	B	$A \to B$	$\neg A$	$\vee$	B
S	S	S	F	S	S
S	F	F	F	F	F
F	S	S	S	S	S
F	F	S	S	S	F

Detta visar att $A \to B$ och $\neg A \vee B$ är satslogiskt ekvivalenta: de har samma sanningsvärde under varje simultan värdering.

sammanfattning

Vi har definierat begreppen satslogisk konsekvens och satslogisk ekvivalens, och sett hur sanningsvärdestabeller används för att avgöra om satslogisk konsekvens eller ekvivalens föreligger.

Vi har också sett hur detta hjälper oss att avgöra om argument i naturligt språk är (satslogiskt) giltiga.

Genom att översätta till satslogiken och ställa upp sanningsvärdestabeller, ser vi om argumentets slutsats är sann under varje värdering där alla premisser är sanna.

Hittar vi en värdering där alla premisser är sanna men slutsatsen falsk, har vi ett motexempel som visar att argumentet är ogiltigt.