Satslogik

Del 2

intro

I denna föreläsning bekantar vi oss med satslogikens semantik: det som bestämmer vad satser i språket betyder.

Denna semantik är extensionell, på så vis att den identifierar en sats' betydelse med dess sanningsvärde.

Semantiken anger regler för att avgöra sanningsvärdet för varje sats i det satslogiska språket.

sanning och falskhet

De satslogiska konnektivens betydelse karaktäriseras i termer av sanning/falskhet:

- $\neg A$ uttrycker att A är falsk
- $A \wedge B$ uttrycker att både A och B är sanna
- $A \vee B$ uttrycker att åtminstone en av A och B är sann
- $A \rightarrow B$ uttrycker att om A är sann så är också B sann
- $A \leftrightarrow B$ uttrycker att A är sann om och endast om B är sann

negation

$\neg A$ uttrycker att A är falsk

För att $\neg A$ ska vara sann, måste alltså A vara falsk

För att $\neg A$ ska vara falsk, måste A vara sann

Detta samband mellan sanningsvärdet hos $\neg A$ och A kan sammanfattas i följande sanningsvärdestabell:

A	$\neg A$
S	F
F	S

S står här för sanningsvärdet sanning, och F står för sanningsvärdet falskhet.

konjunktion

$A \wedge B$ uttrycker ett påstående som är sant om både A och B uttrycker sanna påståenden, och ett påstående som är falskt om åtminstone en av A och B uttrycker ett falskt påstående.

A	B	$A \wedge B$
S	S	S
S	F	F
F	S	F
F	F	F

disjunktion

$A \vee B$ uttrycker ett påstående som är sant om åtminstone en av A och B uttrycker ett sant påstående, och uttrycker ett falskt påstående om både A och B uttrycker falska påståenden.

A	B	$A \vee B$
S	S	S
S	F	S
F	S	S
F	F	F

implikation

$A \to B$ uttrycker att om A är sann, så är också B sann.

Inutitivt stämmer ju detta om både A och B är sanna, och stämmer inte om A är sann utan att B är det.

Det finns ju dock två ytterligare möjligheter: att A är falsk, i kombination med att B är sann/falsk.

Ska implikationen räknas som falsk när A är falsk? Inte enligt satslogiken.

implikation

Tanken är att sanningen hos 'Om A så B' ställer ett villkorat krav på att B är sant: kravet gäller endast under förutsättning att A är sant. Om A är falskt finns inget krav på att B ska vara sant (eller falskt, för den delen). Därför blir det konstigt att säga att $A \to B$ skulle vara falskt i detta fall. Så enligt satslogiken är $A \to B$ sann när A är falsk, oavsett B.

A	B	$A \to B$
S	S	S
S	F	F
F	S	S
F	F	S

implikation

(1) Om vi åderlåter patienten så blir hen frisk.

Satsen uttrycker ett kausalt samband mellan åderlåtning och tillfrisknande.

För att denna sats ska vara sann måste ett sådant samband finnas: det räcker inte att båda leden i satsen är sanna.

Implikation i satslogiken uttrycker svagare samband mellan förled och efterled: om förledet är sant så är efterledet sant, oavsett om t.ex. kausalitet föreligger.
Detta beror på att sanningsvärdena hos svenska påståendesatser inte beror enbart på extensionerna hos dess delsatser, dvs. att de inte är helt extensionella.

ekvivalens

$A \leftrightarrow B$ uttrycker påståendet att A är sann om och endast om B är sann.

$A \leftrightarrow B$ kan också förstås som om den säger att A och B har samma sanningsvärde, eller som två implikationer: $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$ betyder samma sak som $A \leftrightarrow B$.

A	B	$A \leftrightarrow B$
S	S	S
S	F	F
F	S	F
F	F	S

sanning under värderingar

Sanningsvärdestabellerna för de olika konnektiven kan användas för att avgöra sanningsvärdet hos vilken sats som helst om sanningsvärdena hos de ingående atomära satserna är givna.

(2) $P \land \neg(Q \lor R)$

Vi resonerar som följer. Antag att P är sann och att Q och R falska.

Då måste $Q \lor R$ vara falsk, eftersom båda leden är falska.

Därmed måste $\neg(Q \lor R)$ vara sann.

Därmed måste $P \land \neg(Q \lor R)$ vara sann, eftersom båda leden är sanna.

sanning under värderingar

När vi antog att P var sann och Q, R falska gjorde vi en värdering (eller *tolkning*): en bestämning av sanningsvärdet hos de atomära satserna.

En sats sägs vara sann respektive falsk under en värdering om satsen skulle vara sann respektive falsk om satsens ingående atomära satser skulle ha de sanningsvärden de tilldelas av värderingen.

Vi kan systematiskt undersöka sanningsvärdet hos en sats under alla möjliga värderingar genom att ställa upp sanningsvärdestabeller för alla dessa värderingar.

$(P \vee Q) \wedge (\neg P \rightarrow \neg Q)$

P	Q	$(P$	$\vee$	$Q)$	$\wedge$	$(\neg$	P	$\rightarrow$	$\neg$	$Q)$
S	S	S		S			S			S
S	F	S		F			S			F
F	S	F		S			F			S
F	F	F		F			F			F

$(P \vee Q) \wedge (\neg P \to \neg Q)$

P	Q	$(P$	$\vee$	$Q)$	$\wedge$	$(\neg$	P	$\to$	$\neg$	$Q)$
S	S	S	S	S			S			S
S	F	S	S	F			S			F
F	S	F	S	S			F			S
F	F	F	F	F			F			F

$(P \vee Q) \wedge (\neg P \to \neg Q)$

P	Q	$(P$	$\vee$	$Q)$	$\wedge$	$(\neg$	P	$\to$	$\neg$	$Q)$
S	S	S	S	S		F	S		F	S
S	F	S	S	F		F	S		S	F
F	S	F	S	S		S	F		F	S
F	F	F	F	F		S	F		S	F

$(P \vee Q) \wedge (\neg P \to \neg Q)$

P	Q	$(P$	$\vee$	$Q)$	$\wedge$	$(\neg$	P	$\to$	$\neg$	$Q)$
S	S	S	S	S		F	S	S	F	S
S	F	S	S	F		F	S	S	S	F
F	S	F	S	S		S	F	F	F	S
F	F	F	F	F		S	F	S	S	F

$(P \vee Q) \wedge (\neg P \to \neg Q)$

P	Q	$(P$	$\vee$	$Q)$	$\wedge$	$(\neg$	P	$\to$	$\neg$	$Q)$
S	S	S	S	S	S	F	S	S	F	S
S	F	S	S	F	S	F	S	S	S	F
F	S	F	S	S	F	S	F	F	F	S
F	F	F	F	F	F	S	F	S	S	F

sanning under värderingar

Genom att undersöka sanningsvärdet hos en sats under olika värderingar får vi reda på vilken av följande kategorier en viss sats tillhör:

- En sats är satslogiskt sann (en tautologi) om den är sann under alla möjliga värderingar.
- En sats är satslogiskt falsk (en motsägelse) om den är falsk under alla möjliga värderingar.
- En sats är kontingent om den varken är satslogiskt sann eller satslogiskt falsk.

$P \vee \neg P$

Är denna sats en tautologi, en motsägelse, eller kontingent?

P	P	$\vee$	$\neg$	P
S	S			S
F	F			F

$P \vee \neg P$

Är denna sats en tautologi, en motsägelse, eller kontingent?

P	P	$\vee$	$\neg$	P
S	S		F	S
F	F		S	F

$P \vee \neg P$

Är denna sats en tautologi, en motsägelse, eller kontingent?

P	P	$\vee$	$\neg$	P
S	S	S	F	S
F	F	S	S	F

Svar: $P \vee \neg P$ är en tautologi, dvs. sann under alla värderingar.

$P \land \neg P$

Är denna sats en tautologi, en motsägelse, eller kontingent?

P	P	$\land$	$\neg$	P
S	S			S
F	F			F

$P \land \neg P$

Är denna sats en tautologi, en motsägelse, eller kontingent?

P	P	$\land$	$\neg$	P
S	S		F	S
F	F		S	F

$P \land \neg P$

Är denna sats en tautologi, en motsägelse, eller kontingent?

P	P	$\land$	$\neg$	P
S	S	F	F	S
F	F	F	S	F

Svar: $P \land \neg P$ är en motsägelse, dvs. falsk under alla värderingar.

$P \to \neg P$

Är denna sats en tautologi, en motsägelse, eller kontingent?

P	P	$\to$	$\neg$	P
S	S			S
F	F			F

$P \to \neg P$

Är denna sats en tautologi, en motsägelse, eller kontingent?

P	P	$\to$	$\neg$	P
S	S		F	S
F	F		S	F

$P \to \neg P$

Är denna sats en tautologi, en motsägelse, eller kontingent?

P	P	$\to$	$\neg$	P
S	S	F	F	S
F	F	S	S	F

Svar: $P \to \neg P$ är kontingent, dvs. sann under vissa värderingar, och falsk under andra.

sammanfattning

Genom att ställa upp sanningsvärdestabeller för satser kan vi avgöra deras sanningsvärde under alla olika möjliga värderingar.

Vi kan därmed avgöra om en sats är

- en tautologi, dvs. sann under alla värderingar,

  (3) $P \vee \neg P$

- en motsägelse, dvs. falsk under alla värderingar,

  (4) $P \wedge \neg P$

- kontingent, dvs. sann under vissa värderingar men falsk under andra.

  (5) $P \rightarrow \neg P$

Nästa tillfälle kommer vi att se hur sanningsvärdestabeller kan användas för att bevisa/motbevisa satslogisk giltighet.