

# Satslogik

*Syntax och översättning*

# intro

**Logik** är det systematiska studiet av giltiga slutledningar: slutledningar (argument) där sanningen hos slutsatsen garanteras av sanningen hos premisserna.

I första halvan av denna kurs introducerades denna **informella** definition av giltighet, tillsammans med informella metoder för att avgöra giltighet.

Vi såg att ogiltighet kan påvisas informellt, genom att ange **motexempel** i naturligt språk. Men vi hade ingen systematisk metod för att avgöra giltighet.

I denna del av kursen kommer vi att studera hur giltigheten hos argument kan avgöras på ett systematiskt sätt.

## intro

Ni kommer att få lära er precisa logiska språk som reducerar flertydigheter och tydliggör den **logiska formen** hos satser och argument.

I dessa språk kan man ge helt exakta definitioner av **sanningsvillkor** för satser (i språken).

Dessa egenskaper hos logiska språk möjliggör exakta definitioner av **giltighet** hos slutledningar i språken. Exaktheten hos definitionerna av giltighet möjliggör i sin tur **systematiska** metoder för att avgöra giltighet.

Vi kan utnyttja dessa egenskaper hos logiska språk för att avgöra giltighet hos argument i “naturliga” språk, genom att **översätta** satser och argument på svenska till ett logiskt språk.

# intro

Vi kommer att diskutera två stycken logiska språk: det **satslogiska** språket, och det **predikatlogiska** språket.

Med det satslogiska språket studeras slutledningar vars (o)giltighet beror enbart på förekomsten av de **logiska konstanter** som kallas **konnektiv**:

## Konnektiv (prototypiska).

- *icke/inte*
- *och, eller, om ... så, om och endast om*

Med det predikatlogiska språket studeras slutledningar vars (o)giltighet även beror på andra logiska konstanter, så kallade **kvantifikatorer** (t.ex. “alla”, “några”, “inga”).

# satser

Konnektiv används för att sammanfoga påståendesatser: satser som uttrycker **sanna eller falska påståenden**.

Betrakta följande två satser:

- Hana är filosof.
- Dag är läkare.

Vi kan bilda nya satser från dessa genom att använda logiska konnektiv:

- Hana är filosof **och** Dag är läkare.
- Hana är filosof **eller** Dag är läkare.
- Dag är **inte** läkare.
- **Om** Hana är filosof **så** är Dag läkare.
- **Om** Hana är filosof **och** Dag är läkare **så** är Hana filosof.

# det satslogiska språket

I satslogiska språk används speciella tecken som (i viss mån) motsvarar svenska konnektiv:  $\neg$ ,  $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\rightarrow$ ,  $\leftrightarrow$ <sup>1</sup>

Liksom i svenskan används konnektiven för att sammanfoga (**enkla** eller **komplexa**) satser.

Enkla satser innehåller inga konnektiv. Dessa uttrycks i det satslogiska språket som **satsbokstäver** ( $P$ ,  $Q$ ,  $R$ ...):

- (1) Det regnar.  
**Översättning:**  $P$ .

Komplexa satser innehåller ett eller flera konnektiv.

---

<sup>1</sup>Till skillnad från konnektiven i vanlig svenska, är konnektiven i satslogiken helt entydiga, och skiftar aldrig betydelse i kontext. Detta gör att satslogikens konnektiv inte kan ses som fullständiga motsvarigheter till de svenska konnektiven: de tar (som mest) fasta på den del av betydelsen hos de svenska konnektiven som har bäring på satslogisk giltighet.

# negation

**Symbol:**  $\neg$

**Placering:** Före en sats:  $\neg P$ .

**Utläses:** "Icke- $P$ ", "Det är inte fallet att  $P$ ..."

**Betydelse:**  $\neg P$  uttrycker **att  $P$  är falsk**.

(2) Det regnar inte.

**Översättning:**  $\neg P$ , där  $P$ : *det regnar*.

(3) Ingen gillar regn.

**Översättning:**  $\neg Q$ , där  $Q$ : *någon gillar regn*.

# konjunktion

**Symbol:**  $\wedge$

**Placering:** mellan två satser:  $P \wedge Q$ .

**Utläses:** “ $P$  och  $Q$ ”.

**Betydelse:**  $P \wedge Q$  uttrycker att **både**  $P$  **och**  $Q$  är sanna.

- (4) Det regnar **och** solen skiner.  
**Översättning:**  $P \wedge Q$ .
- (5) Det regnar **men** solen skiner.  
**Översättning:**  $P \wedge Q$ .



## notera

I översättning till satslogiskt språk måste ofta lätta omskrivningar göras:

(6) Hana föreläser och är glad.

Omskrivning: Hana föreläser och Hana är glad.

Översättning:  $P \wedge Q$ .

Här står alltså  $Q$  för “Hana är glad”, *inte* för “är glad”.

Satslogiska konnektiv sammanfogar ju *satser*, dvs. saker som kan vara sanna eller falska. “är glad” är ett predikat, och predikat kan inte vara sanna eller falska (fristående).

# disjunktion

**Symbol:**  $\vee$

**Placering:** mellan två satser:  $P \vee Q$ .

**Utläses:** “ $P$  eller  $Q$ ”.

**Betydelse:**  $P \vee Q$  uttrycker att **minst en** av  $P$  och  $Q$  är sann.

(7) Hana föreläser eller är glad.

**Översättning:**  $P \vee Q$ .

# implikation

**Symbol:**  $\rightarrow$

**Placering:** mellan två satser:  $A \rightarrow B$

**Utläses:** “om  $P$  så  $Q$ ” eller “ $P$  implicerar  $Q$ ”

**Betydelse:**  $P \rightarrow Q$  uttrycker att om  $P$  är sann, så är också  $Q$  sann: sanningen hos  $P$  utgör ett tillräckligt villkor för att  $Q$  ska vara sann.

- (8) Om klockan är fem så går mitt armbandsur fel.  
**Översättning:**  $P \rightarrow Q$ .
- (9) Mitt armbandsur går fel om klockan är fem.  
**Översättning:**  $P \rightarrow Q$ .

# ekvivalens

**Symbol:**  $\leftrightarrow$

**Placering:** mellan två satser:  $P \leftrightarrow Q$

**Utläses:** “ $P$  om och endast om  $Q$ ”

**Betydelse:**  $A \leftrightarrow B$  uttrycker att  $P$  är sann om och endast om  $Q$  är sann. Detta kan förstås som att sanningen hos  $P$  utgör både ett **nödvändigt och tillräckligt** villkor för att  $Q$  ska vara sann, eller som att  $P$  och  $Q$  har precis samma sanningsvärden.

- (10) Jag kommer till mötet om du gör det, men inte annars.  
**Översättning:**  $P \leftrightarrow Q$ .

# sammanfattning

	symbol	placering	utläses
negation	$\neg$	$\neg P$	det är inte fallet att $P$ , icke- $P$
konjunktion	$\wedge$	$P \wedge Q$	$P$ och $Q$
disjunktion	$\vee$	$P \vee Q$	$P$ eller $Q$
implikation	$\rightarrow$	$P \rightarrow Q$	om $P$ så $Q$
ekvivalens	$\leftrightarrow$	$P \leftrightarrow Q$	$P$ om och endast om $Q$

## kombinationer av konnektiv

Satser (på svenska och i predikatlogiken) kan innehålla flera förekomster av konnektiv.

Från satserna *Hana är pigg* ( $P$ ) och *Hana är trött* ( $Q$ ) kan vi bilda följande med disjunktion:

- (11) Hana är pigg eller trött.  
**Översättning:**  $P \vee Q$ .

Resultatet kan i sin tur kombineras med satsen *Hana föreläser* ( $R$ ) med konjunktion:

- (12) Hana är pigg eller trött, och föreläser.  
**Översättning:**  $(P \vee Q) \wedge R$

Man sätter alltid **parenteser** kring  $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\rightarrow$ ,  $\leftrightarrow$ -satser innan de kombineras.

## parenteser

Parenteserna krävs för att undvika flertydighet.

$$(13) \quad P \vee Q \rightarrow R$$

Detta verkar flertydigt: ska det förstås som  $(P \vee Q) \rightarrow R$ , eller som  $P \vee (Q \rightarrow R)$ ? Läsningarna har olika sanningsvillkor.

Säg att  $P$ : *det är vinter*,  $Q$ : *det är sommar*,  $R$ : *medeltemperaturen är hög*.

Då är  $(P \vee Q) \rightarrow R$  falsk: det är sant att det är vinter eller sommar ( $P \vee Q$ ), men falskt att medeltemperaturen är hög ( $R$ ).

Däremot är  $P \vee (Q \rightarrow R)$  sann: det är sant att det är vinter ( $P$ ), och sant att om det är sommar, så är medeltemperaturen hög ( $Q \rightarrow R$ ).

## parenteser

Regeln att alltid sätta parenteser kring  $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ -satsen gör att varje komplex sats får en bestämd betydelse: alla satslogiska satser är entydiga.

Satsens yttersta (senast tillagda) konnektiv avgör slutgiltigt om satsen är en negation, en konjunktion, en disjunktion, en implikation eller en ekvivalens. Detta är satsens **huvudkonnektiv**.

$$(14) \quad (P \vee Q) \wedge R$$

$$(15) \quad P \vee (Q \wedge R)$$



## parenteskonventioner

För att undvika att behöva använda stora mängder parenteser används **parenteskonventioner**. Exempelvis:

- Om en konjunktion ingår som en del i en annan konjunktion, så behöver parenteserna runt konjunktionen inte skrivas ut:

$$(16) \quad (P \wedge Q) \wedge R \text{ kan skrivas } P \wedge Q \wedge R$$

- Om vänster- eller högerledet i en implikation är en disjunktion eller konjunktion, så behöver parenteser runt disjunktionen (konjunktionen) inte skrivas ut:

$$(17) \quad (P \vee Q) \rightarrow R \text{ kan skrivas } P \vee Q \rightarrow R$$

Däremot tillåts man **inte** ta bort parenteser från  $P \vee (Q \rightarrow R)$ . Därmed bevarar konventionerna entydighet:  $P \vee Q \rightarrow R$  måste förstås som  $(P \vee Q) \rightarrow R$ .

# översättning

(18) Om Hana inte är på jobbet så är hon hemma eller på gymmet.

För att översätta till satslogik, börja med att identifiera **konnektiv** och **atomära satser**.

- Konnektiv: ”Om ... så ...”, ”inte”, ”eller”
- Atomära satser: *Hana är på jobbet*, *Hana är hemma*, *Hana är på gymmet*

Översätt konnektiven och de atomära satserna, dvs. ange ett lexikon:

- Konnektiv:  $\rightarrow$ ,  $\neg$ ,  $\vee$
- Lexikon:  $P$ : *Hana är på jobbet*,  $Q$ : *Hana är hemma*,  $R$ : *Hana är på gymmet*.

## översättning

- (19) Om Hana inte är på jobbet så är hon hemma eller på gymmet.

Avgör sedan hur satserna och konnektiven är sammanfogade. Tag hjälp av era intuitioner om satsens betydelse (sanningsvillkor): vilken av följande fångar betydelsen hos ??, med angivet lexikon?

- Lexikon:  $P$ : Hana är på jobbet,  $Q$ : Hana är hemma,  $R$ : Hana är på gymmet.

- (20)  $(\neg P \rightarrow Q) \vee R$   
Ung.: Om Hana inte är på jobbet så är hon hemma, eller så är hon på gymmet
- (21)  $\neg P \rightarrow (Q \vee R)$   
Ung.: Om Hana inte är på jobbet, så är hon hemma eller så är hon på gymmet