Frågor & Repetition

Kursdel 2

satslogik

- **Centrala begrepp**: Sats, konnektiv, negation, konjunktion, disjunktion, ekvivalens, atomära satser, molekylära satser, parenteskonventioner, värdering, sanningsvärdestabeller, satslogisk sanning/falskhet, kontingens, satslogisk konsekvens och ekvivalens, motexempel.
- **Centrala färdigheter**: Du bör kunna
  - Översätta enklare svenska satser till satslogiska satser,
  - Läsa och förstå enklare satslogiska satser,
  - Avgöra sanningsvärden hos molekylära satser under givna värderingar,
  - Avgöra huruvida, och förklara varför, en sats är satslogiskt sann, satslogiskt falsk eller kontingent genom användning av sanningsvärdestabeller och motexempel,
  - Avgöra huruvida, och förklara varför, satslogisk konsekvens och ekvivalens föreligger genom användning av sanningsvärdestabeller och motexempel.

satslogik: syntax & översättning

Det satslogiska språket består av satsbokstäver, symboler för konnektiv, och parenteser.

Atomära satser symboliseras med satsbokstäver (P, Q, R...), och motsvarar kompletta påståendesatser utan konnektiv.

Molekylära satser motsvarar kompletta påståendesatser med konnektiv, och bildas genom att kombinera satsbokstäver med symboler för konnektiv, enligt reglerna nedan.

	symbol	placering	utläses
negation	$\neg$	$\neg P$	det är inte fallet att P, icke-P
konjunktion	$\wedge$	$P \wedge Q$	P och Q
disjunktion	$\vee$	$P \vee Q$	P eller Q
implikation	$\rightarrow$	$P \rightarrow Q$	om P så Q
ekvivalens	$\leftrightarrow$	$P \leftrightarrow Q$	P om och endast om Q

satslogik: syntax & översättning

När molekylära satser bildade med $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ ingår som ett led i en större sats omges de med parenteser.

(1) $(P \wedge Q) \rightarrow R$

Det yttersta konnektivet i en sats—det utan omgivande parenteser, om alla tillåtna parenteser är utskrivna—är satsens huvudkonnektiv: det som slutgiltigt bestämmer vad satsen har för sanningsvärde.

Specialfall: både en negation och ett binärt konnektiv saknar parenteser, fast alla tillåtna parenteser är utskrivna. Då är alltid det binära konnektivet huvudkonnektivet.

(2) $\neg(P \wedge Q) \rightarrow R$

satslogik: syntax & översättning

Om en sats saknar någon av de tillåtna parenteserna, har dessa tagits bort i enlighet med följande parenteskonventioner.

- Parenteser kring en konjunktion får utelämnas omm konjunktionen ingår som ett led i (i) en annan konjunktion, (ii) en implikation, eller (iii) en ekvivalens.
  - (i) $(P \wedge Q) \wedge R$ kan skrivas $P \wedge Q \wedge R$
  - (ii) $(P \wedge Q) \to R$ kan skrivas $P \wedge Q \to R$
  - (iii) $(P \wedge Q) \leftrightarrow R$ kan skrivas $P \wedge Q \leftrightarrow R$

satslogik: syntax & översättning

Om en sats saknar någon av de tillåtna parenteserna, har dessa tagits bort i enlighet med följande parenteskonventioner.

- Parenteser kring en konjunktion får utelämnas omm konjunktionen ingår som ett led i (i) en annan konjunktion, (ii) en implikation, eller (iii) en ekvivalens.
  - (i) $(P \wedge Q) \wedge R$ kan skrivas $P \wedge Q \wedge R$
  - (ii) $(P \wedge Q) \to R$ kan skrivas $P \wedge Q \to R$
  - (iii) $(P \wedge Q) \leftrightarrow R$ kan skrivas $P \wedge Q \leftrightarrow R$
- Parenteser kring en disjunktion får utelämnas omm disjunktionen ingår som ett led i (i) en annan disjunktion, (ii) en implikation, eller (iii) en ekvivalens.
  - (i) $(P \vee Q) \vee R$ kan skrivas $P \vee Q \vee R$
  - (ii) $(P \vee Q) \to R$ kan skrivas $P \vee Q \to R$
  - (iii) $(P \vee Q) \leftrightarrow R$ kan skrivas $P \vee Q \leftrightarrow R$

satslogik: syntax & översättning

För att översätta till satslogik, börja med att identifiera konnektiv och atomära satser.

(3) Om Hana inte jobbar så är hon hemma eller på gymmet.

- Konnektiv: ”Om ... så ...”, ”inte, ”eller”
- Atomära satser: *Hana jobbar / är hemma / är på gymmet*

Översätt konnektiven och inför satsbokstäver för atomära satserna:

- Konnektiv: $\rightarrow$, $\neg$, $\vee$
- *J = Hana jobbar*, *H = Hana är hemma*, *G = Hana är på gymmet*.

Sammanfoga sedan dessa på ett sätt som fångar satsens ursprungliga betydelse (inom satslogikens gränser):

(3) $\neg J \rightarrow (H \vee G)$

exempelfrågor

Översätt följande satser till satslogik. Om du inför bokstäver för atomära satser, skriv tydligt ut vilka satser de står för.

1. Hana tar på sig en jacka om det är kallt eller regnigt.
2. Det är varken kallt eller regnigt.
3. Det är kallt, och om det är kallt tar Hana på sig en jacka.

exempelfrågor

Översätt följande satser till satslogik. Om du inför bokstäver för atomära satser, skriv tydligt ut vilka satser de står för.

1. Hana tar på sig en jacka om det är kallt eller regnigt.
2. Det är varken kallt eller regnigt.
3. Det är kallt, och om det är kallt tar Hana på sig en jacka.

Svar: $J =$ Hana tar på sig en jacka, $K =$ det är kallt, $R =$ det är regnigt.

exempelfrågor

Översätt följande satser till satslogik. Om du inför bokstäver för atomära satser, skriv tydligt ut vilka satser de står för.

1. Hana tar på sig en jacka om det är kallt eller regnigt.
2. Det är varken kallt eller regnigt.
3. Det är kallt, och om det är kallt tar Hana på sig en jacka.

Svar: $J =$ Hana tar på sig en jacka, $K =$ det är kallt, $R =$ det är regnigt.

1. $K \vee R \to J$

exempelfrågor

Översätt följande satser till satslogik. Om du inför bokstäver för atomära satser, skriv tydligt ut vilka satser de står för.

1. Hana tar på sig en jacka om det är kallt eller regnigt.
2. Det är varken kallt eller regnigt.
3. Det är kallt, och om det är kallt tar Hana på sig en jacka.

Svar: $J =$ Hana tar på sig en jacka, $K =$ det är kallt, $R =$ det är regnigt.

1. $K \vee R \rightarrow J$
2. $\neg(K \vee R)$ alt. $\neg K \wedge \neg R$

exempelfrågor

Översätt följande satser till satslogik. Om du inför bokstäver för atomära satser, skriv tydligt ut vilka satser de står för.

1. Hana tar på sig en jacka om det är kallt eller regnigt.
2. Det är varken kallt eller regnigt.
3. Det är kallt, och om det är kallt tar Hana på sig en jacka.

Svar: $J =$ Hana tar på sig en jacka, $K =$ det är kallt, $R =$ det är regnigt.

1. $K \vee R \to J$
2. $\neg(K \vee R)$ alt. $\neg K \wedge \neg R$
3. $K \wedge (K \to J)$

exempelfrågor

Översätt följande satser till satslogik. Om du inför bokstäver för atomära satser, skriv tydligt ut vilka satser de står för.

1. Hana tar på sig en jacka om det är kallt eller regnigt.
2. Det är varken kallt eller regnigt.
3. Det är kallt, och om det är kallt tar Hana på sig en jacka.

Svar: $J =$ Hana tar på sig en jacka, $K =$ det är kallt, $R =$ det är regnigt.

1. $K \vee R \rightarrow J$
2. $\neg(K \vee R)$ alt. $\neg K \wedge \neg R$
3. $K \wedge (K \rightarrow J)$

satslogik: semantik

I satslogiken är satser sanna eller falska relativt till värderingar: tilldelningar av sanningsvärden (S/F) till alla atomära satser som ingår i den eller de satser som undersöks.

En värdering bestämmer sanningsvärdet hos en molekylära satser via sanningsvillkoren för konnektiven:

- $\neg A$ uttrycker att A är falsk
- $A \wedge B$ uttrycker att både A och B är sanna
- $A \vee B$ uttrycker att minst en av A och B är sann
- $A \rightarrow B$ uttrycker att om A är sann så är också B sann
- $A \leftrightarrow B$ uttrycker att A och B har samma sanningsvärde

satslogik: semantik

A	$\neg A$
S	F
F	S

A	B	$A \wedge B$
S	S	S
S	F	F
F	S	F
F	F	F

A	B	$A \vee B$
S	S	S
S	F	S
F	S	S
F	F	F

A	B	$A \rightarrow B$
S	S	S
S	F	F
F	S	S
F	F	S

A	B	$A \leftrightarrow B$
S	S	S
S	F	F
F	S	F
F	F	S

Vi kan därmed undersöka sanningsvärdet hos en sats under en viss värdering genom att ställa upp en sanningsvärdestabell som inkluderar endast denna värdering.

Exempel. Vad har satsen $(P \vee Q) \wedge (\neg P \to \neg Q)$ för sanningsvärde i värderingen där P är sann men Q är falsk?

satslogik: semantik

Vi kan därmed undersöka sanningsvärdet hos en sats under en viss värdering genom att ställa upp en sanningsvärdestabell som inkluderar endast denna värdering.

Exempel. Vad har satsen $(P \vee Q) \wedge (\neg P \rightarrow \neg Q)$ för sanningsvärde i värderingen där P är sann men Q är falsk?

P	Q	$(P$	$\vee$	$Q)$	$\wedge$	$(\neg$	P	$\rightarrow$	$\neg$	$Q)$
S	F	S	S	F	S	F	S	S	S	F

Svar: Då är satsen sann.

exempelfrågor

Antag att de atomära satserna P, Q och R har följande sanningsvärden: P är sann, Q är falsk och R är sann. Vad har följande satser för sanningsvärden under denna värdering? Du behöver bara svara ”sann” eller ”falsk”.

1. $\neg P \wedge Q \rightarrow (R \rightarrow Q)$
2. $(P \leftrightarrow Q) \wedge \neg(P \vee \neg R)$

exempelfrågor

Antag att de atomära satserna P, Q och R har följande sanningsvärden: P är sann, Q är falsk och R är sann. Vad har följande satser för sanningsvärden under denna värdering? Du behöver bara svara "sann" eller "falsk".

1. $\neg P \land Q \to (R \to Q)$
2. $(P \leftrightarrow Q) \land \neg(P \lor \neg R)$

Svar:

1. Sann. *Förklaring, behöver ej ges på tentan:*

P	Q	R	$(\neg$	P	$\land$	$Q)$	$\to$	$(R$	$\to$	$Q)$
S	F	S	F	S	F	F	S	S	F	F

exempelfrågor

Antag att de atomära satserna P, Q och R har följande sanningsvärden: P är sann, Q är falsk och R är sann. Vad har följande satser för sanningsvärden under denna värdering? Du behöver bara svara "sann" eller "falsk".

1. $\neg P \wedge Q \to (R \to Q)$
2. $(P \leftrightarrow Q) \wedge \neg(P \vee \neg R)$

Svar:

1. Sann. *Förklaring, behöver ej ges på tentan:*

P	Q	R	$(\neg$	P	$\wedge$	$Q)$	$\to$	$(R$	$\to$	$Q)$
S	F	S	F	S	F	F	S	S	F	F

2. Falsk. *Förklaring, behöver ej ges på tentan:* Huvudkonnektivet är en konjunktion, med $(P \leftrightarrow Q)$ som ena led. Eftersom P är sann men Q falsk, är $(P \leftrightarrow Q)$ falsk. Eftersom en konjunktion med ett falskt led alltid är falsk, är hela satsen falsk.

satslogik: semantik, forts.

Vi kan systematiskt undersöka sanningsvärdet hos en sats under alla möjliga värderingar genom att ställa upp sanningsvärdestabeller som inkluderar rader för alla dessa värderingar.

På så vis får vi reda på om en sats är

- satslogiskt sann (en tautologi), dvs. sann under alla värderingar,
- satslogiskt falsk (en motsägelse), dvs. falsk under alla värderingar,
- kontingent, dvs. sann under några men inte alla värderingar.

exempelfrågor

Avgör med hjälp av sanningsvärdestabeller huruvida följande sats är satslogiskt sann, satslogiskt falsk eller kontingent. Motivera ditt svar!

1 $\neg(P \wedge Q) \wedge \neg(P \wedge \neg Q) \to Q \wedge \neg P$

Avgör med hjälp av sanningsvärdestabeller huruvida följande sats är satslogiskt sann, satslogiskt falsk eller kontingent. Motivera ditt svar!

1 $\neg(P \wedge Q) \wedge \neg(P \wedge \neg Q) \rightarrow Q \wedge \neg P$

Svar: För att tydliggöra huvudkonnektivet återställer vi parenteser i enlighet med konventionerna:

1 $(\neg(P \wedge Q) \wedge \neg(P \wedge \neg Q)) \rightarrow (Q \wedge \neg P)$

Detta tydliggör att $\rightarrow$ är satsens huvudkonnektiv. Vi ställer upp en sanningstabell för att undersöka om implikationen är sann, falsk, eller varierar mellan de möjliga tolkningarna.

exempelfrågor

P	Q	$(\neg$	$(P \wedge Q)$	$\wedge$	$\neg$	$(P \wedge \neg Q))$	$\rightarrow$	$(Q \wedge \neg P)$
S	S	F	S	F	S	F	S	F
S	F	S	F	F	F	S	S	F
F	S	S	F	S	S	F	S	S
F	F	S	F	S	S	F	F	F

Detta visar att satsen är kontingent: implikationen är sann under vissa värderingar, men inte under alla.

satslogik: konsekvens och ekvivalens

En sats B är en satslogisk konsekvens av satserna $A_1, \ldots, A_n$, skrivet $A_1, \ldots, A_n \Rightarrow B$, om och endast om det inte finns någon simultan värdering under vilken samtliga $A_1, \ldots, A_n$ är sanna men B är falsk.

För att avgöra om $A_1, \ldots, A_n \Rightarrow B$ så ställer vi upp en sanningsvärdestabell som inkluderar alla simultana värderingar[1] av dessa satser, och undersöker de värderingar (rader) där alla satser $A_1, \ldots, A_n$ är sanna.

Om B är sann på alla dessa rader, stämmer det att $A_1, \ldots, A_n \Rightarrow B$.

Om B är falsk på någon sådan rader, stämmer det inte att $A_1, \ldots, A_n \Rightarrow B$: då utgör värderingen där B är falsk ett motexempel mot konsekvens.

[1] En simultan värdering av $A_1, \ldots, A_n$ och B är en värdering som tilldelar sanningsvärden till alla atomära satser som förekommer.

satslogik: konsekvens och ekvivalens

Två satser A, B är satslogiskt ekvivalenta, skrivet $A \Leftrightarrow B$, om och endast om A har samma sanningsvärde som B under varje simultan värdering av A och B.

För att avgöra om $A \Leftrightarrow B$ så ställer vi upp en sanningsvärdestabell som inkluderar alla simultana värderingar av dessa satser.

Om sanningsvärdena hos A, B överrensstämmer med varandra på alla rader, stämmer det att $A \Leftrightarrow B$.

Om sanningsvärdena hos A, B skiljer sig på någon rad, stämmer det inte att $A \Leftrightarrow B$: då utgör värderingen där de skiljer sig åt ett motexempel mot ekvivalens.

Avgör huruvida nedanstående påstående stämmer eller inte med hjälp av sanningsvärdestabeller eller genom att ange en värdering som motexempel. Motivera ditt svar!

(4) $P \land Q \Leftrightarrow (P \rightarrow Q) \land P$

exempelfrågor

Avgör huruvida nedanstående påstående stämmer eller inte med hjälp av sanningsvärdestabeller eller genom att ange en värdering som motexempel. Motivera ditt svar!

(4) $\quad P \wedge Q \Leftrightarrow (P \rightarrow Q) \wedge P$

Svar: Detta stämmer: satsen $P \wedge Q$ har samma sanningsvärde som $(P \rightarrow Q) \wedge P$ i alla värderingar. Detta kan ses i följande sanningsvärdestabell:

P	Q	P	$\wedge$	Q	$(P$	$\rightarrow$	$Q)$	$\wedge$	P
S	S	S	S	S	S	S	S	S	S
S	F	S	F	F	S	F	F	F	S
F	S	F	F	S	F	S	S	F	F
F	F	F	F	F	F	S	F	F	F

exempelfrågor

Avgör huruvida nedanstående påstående stämmer eller inte med hjälp av sanningsvärdestabeller eller genom att ange en värdering som motexempel. Motivera ditt svar!

(5) $\neg(P \leftrightarrow Q) \Rightarrow \neg P \wedge \neg Q$

exempelfrågor

Avgör huruvida nedanstående påstående stämmer eller inte med hjälp av sanningsvärdestabeller eller genom att ange en värdering som motexempel. Motivera ditt svar!

(5) $\neg(P \leftrightarrow Q) \Rightarrow \neg P \land \neg Q$

Svar: Detta stämmer inte: $\neg P \land \neg Q$ är inte en satslogisk konsekvens av $\neg(P \leftrightarrow Q)$. Följande värdering är ett motexempel, dvs. en värdering där $\neg(P \leftrightarrow Q)$ är sann, men $\neg P \land \neg Q$ falsk: P är sann och Q falsk.

predikatlogik

- **Centrala begrepp**: Predikat, individtermer, individvariabler, allkvantifikator, existenskvantifikator, fria och bundna variabelförekomster, atomära formler/satser, molekylära formler/satser, individområde, värdering, tolkning, sanning och falskhet i tolkningar, predikatlogisk sanning/falskhet, predikatlogisk konsekvens och ekvivalens, motexempel.
- **Centrala färdigheter**: Du bör kunna
  - Översätta enklare svenska satser till predikatlogiska satser,
  - Läsa och förstå innebörden hos enklare predikatlogiska satser,
  - Avgöra sanningsvärden hos molekylära satser under givna tolkningar,
  - Konstruera tolkningar som utgör motexempel mot påstådda predikatlogiska konsekvenser och ekvivalenser, samt förklara varför de utgör motexempel.

predikatlogik: syntax & översättning

Predikatlogiken innehåller (utöver parenteser) följande typer av uttryck:

- De satslogiska konnektiven ($\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$)
- Predikat (LÄRARE, FILOSOF, L, P)
- Individtermer (*sokrates*, *hana*, s, h)
- Individvariabler (x, y, z...)
- Kvantifikatorer ($\forall$, $\exists$)

predikatlogik: syntax & översättning

Predikatlogiken innehåller (utöver parenteser) följande typer av uttryck:

- De satslogiska konnektiven ($\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$)
- Predikat (LÄRARE, FILOSOF, L, P)
- Individtermer (*sokrates*, *hana*, s, h)
- Individvariabler (x, y, z...)
- Kvantifikatorer ($\forall$, $\exists$)

Atomära satser bildas av predikat och individtermer ($P(sokrates)$).

Molekylära satser bildas av atomära satser i kombination med konnektiv och/eller kvantifikatorer + individvariabler. Konnektiv placeras ut (och fungerar i allmänhet) precis som i satslogiken.

predikatlogik: syntax & översättning

Predikatlogiken innehåller två kvantifikatorer: allkvantifikatorn och existenskvantifikatorn.

Allkvantifikatorn skrivs $\forall$, och motsvarar ”för alla ting gäller att”.

Existenskvantifikatorn skrivs $\exists$, och motsvarar ”det finns någonting för vilket det gäller att”.

Kvantifikatorer placeras tillsammans med en individvariabel (x, y, z...) framför en formel, och bildar då en ny formel:

(6) $\forall x \textsc{filosof}(x)$ ”Alla är filosofer”

(7) $\exists x \textsc{filosof}(x)$ ”Någon är filosof”

predikatlogik: syntax & översättning

Om vi vill att en kvantifikator ska ha räckvidd över en molekylär formel, dvs. ange hur alla (matchande) ingående variabler ska förstås, behöver vi omge formeln med parenteser.

(8) $\forall x(\textsc{filosof}(x) \rightarrow \textsc{logiker}(x))$
Alla filosofer är logiker.

predikatlogik: syntax & översättning

Om vi vill att en kvantifikator ska ha räckvidd över en molekylär formel, dvs. ange hur alla (matchande) ingående variabler ska förstås, behöver vi omge formeln med parenteser.

(8) $\forall x(\textsc{filosof}(x) \rightarrow \textsc{logiker}(x))$
Alla filosofer är logiker.

Allkvantifikator + implikation används alltså för att översätta satser av typen "alla A är B". "Någon/ingen A är B" översätts:

(9) $\exists x(\textsc{filosof}(x) \wedge \textsc{logiker}(x))$
Någon filosof är logiker.

(10) $\neg\exists x(\textsc{filosof}(x) \wedge \textsc{logiker}(x))$
Ingen filosof är logiker.

exempelfrågor

Översätt följande satser till predikatlogik. Om du inför bokstäver för predikat och individtermer, skriv tydligt ut vilka predikat och individtermer de står för. Förutsätt ett obegränsat individområde.

1. Det finns en glad katt med päls.
2. Alla hundar har päls, men det finns katter som inte har det.

exempelfrågor

Översätt följande satser till predikatlogik. Om du inför bokstäver för predikat och individtermer, skriv tydligt ut vilka predikat och individtermer de står för. Förutsätt ett obegränsat individområde.

1. Det finns en glad katt med päls.
2. Alla hundar har päls, men det finns katter som inte har det.

Svar: $G =$ är glad, $K =$ är en katt, $H =$ är en hund, P = har päls.

exempelfrågor

Översätt följande satser till predikatlogik. Om du inför bokstäver för predikat och individtermer, skriv tydligt ut vilka predikat och individtermer de står för. Förutsätt ett obegränsat individområde.

1. Det finns en glad katt med päls.
2. Alla hundar har päls, men det finns katter som inte har det.

Svar: $G =$ är glad, $K =$ är en katt, $H =$ är en hund, P = har päls.

1. $\exists x(G(x) \land K(x) \land P(x))$

exempelfrågor

Översätt följande satser till predikatlogik. Om du inför bokstäver för predikat och individtermer, skriv tydligt ut vilka predikat och individtermer de står för. Förutsätt ett obegränsat individområde.

1. Det finns en glad katt med päls.
2. Alla hundar har päls, men det finns katter som inte har det.

Svar: $G =$ är glad, $K =$ är en katt, $H =$ är en hund, P = har päls.

1. $\exists x(G(x) \land K(x) \land P(x))$
2. $\forall x(H(x) \to P(x)) \land \exists x(K(x) \land \neg P(x))$

exempelfrågor

Översätt följande satser till predikatlogik. Om du inför bokstäver för predikat och individtermer, skriv tydligt ut vilka predikat och individtermer de står för. Förutsätt ett obegränsat individområde.

1. Det finns en glad katt med päls.
2. Alla hundar har päls, men det finns katter som inte har det.

Svar: $G =$ är glad, $K =$ är en katt, $H =$ är en hund, P = har päls.

1. $\exists x(G(x) \land K(x) \land P(x))$
2. $\forall x(H(x) \to P(x)) \land \exists x(K(x) \land \neg P(x))$
   Alt.: $\forall x(H(x) \to P(x)) \land \neg\forall x(K(x) \to P(x))$

predikatlogik: semantik

Sanning i predikatlogiken relativ till tolkningar, som i sin tur består av individområden och värderingar.

Tolkning. Ett individområde I tillsammans med en värdering V av satserna $A_1, \ldots, A_n$ utgör en *tolkning* av $A_1, \ldots, A_n$ (betecknat (I, V)).

Individområdet I är en mängd objekt (individer), och specificerar intuitivt vad som ska räknas som "alla (individer)" när man avgör om en sats är sann eller falsk i tolkningen.

Värderingen V tilldelar varje

- individterm i $A_1, \ldots, A_n$ en individ från I,
- predikat i $A_1, \ldots, A_n$ en mängd av individer från I.

predikatlogik: semantik

En atomär sats $P(a)$ är sann i (I, V) omm $V(a)$ ingår i $V(P)$.

Sanningsvillkoren för konnektiv är desamma som i satslogiken:

- $\neg A$ är sann i (I, V) omm A är falsk i (I, V).
- $A \land B$ är sann i (I, V) omm både A och B är sanna i (I, V).
- $A \lor B$ är sann i (I, V) omm A eller B är sann i (I, V).
- $A \rightarrow B$ är sann i (I, V) omm A är falsk i (I, V) eller B är sann i (I, V).
- $A \leftrightarrow B$ är sann i (I, V) omm A och B har samma sanningsvärde i (I, V).

predikatlogik: semantik

Vi antar att värderingar ger varje individ i individområdet ett namn: en individterm som betecknar just den individen. Då kan vi formulera sanningsvillkoren för kvantifierade satser så här:

En sats $\forall x A$, där A som mest har x fri, är sann i (I, V) omm följande gäller för alla individer b i I: satsen som fås av att byta ut förekomsterna av x i A mot namnet på b är sann i (I, V).

En sats $\exists x A$, där A som mest har x fri, är sann i (I, V) omm följande gäller för någon individ b i I: satsen som fås av att byta ut förekomsterna av x i A mot namnet på b är sann i (I, V).

predikatlogik: semantik

Exempel. En sats på formen $\exists x P(x)$ är sann i alla tolkningar (I, V) där någon individ har egenskapen P. I alla andra tolkningar är satsen falsk.

Exempel. En sats på formen $\forall x P(x)$ är alltså sann i alla tolkningar (I, V) där alla individer har egenskapen P. I alla andra tolkningar är satsen falsk.

Exempel. En sats på formen $\forall x(P(x) \wedge Q(x))$ är sann i alla tolkningar (I, V) där alla individer har både egenskapen P och egenskapen Q. I alla andra tolkningar är satsen falsk.

Exempel. En sats på formen $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$ är sann i alla tolkningar (I, V) där någon individ har både egenskapen P och egenskapen Q. I alla andra tolkningar är satsen falsk.

exempelfrågor

Avgör sanningsvärdet på nedanstående satser under följande tolkning. Du behöver bara svara "sann" eller "falsk".

- Individområde: $I = \{\text{Xena}, \text{Ygritte}, \text{Zorro}\}$
- Värdering: $V(P) = \{\text{Xena}\}$, $V(Q) = \{\text{Xena}, \text{Ygritte}\}$, $V(R) = \{\text{Zorro}\}$, och $V(xena) = \text{Xena}$, $V(ygritte) = \text{Ygritte}$, $V(zorro) = \text{Zorro}$.

(11) $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x) \vee R(x))$

(12) $\exists x P(x) \leftrightarrow \exists x(R(x) \wedge \neg Q(x))$

(13) $\forall x(Q(x) \vee R(x)) \rightarrow \exists x(P(x) \wedge Q(x))$

exempelfrågor

- Individområde: $I = \{\text{Xena}, \text{Ygritte}, \text{Zorro}\}$
- Värdering: $V(P) = \{\text{Xena}\}$, $V(Q) = \{\text{Xena}, \text{Ygritte}\}$, $V(R) = \{\text{Zorro}\}$, och individerna har sina uppenbara namn.

(11) $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x) \vee R(x))$

Svar: Sann.

exempelfrågor

- Individområde: $I = \{\text{Xena}, \text{Ygritte}, \text{Zorro}\}$
- Värdering: $V(P) = \{\text{Xena}\}$, $V(Q) = \{\text{Xena}, \text{Ygritte}\}$, $V(R) = \{\text{Zorro}\}$, och individerna har sina uppenbara namn.

(11) $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x) \vee R(x))$

Svar: Sann.

Förklaring (behöver ej skrivas på tentan!): Satsen är sann eftersom alla sätt att byta ut variabeln x i $P(x) \rightarrow Q(x) \vee R(x)$ mot individnamn (*xena*, *ygritte*, *zorro*) resulterar i sanna satser:

$P(xena) \rightarrow (Q(xena) \vee R(xena))$ är sann. $Q(xena)$ är sann eftersom Xena $\in V(Q)$. Därmed är $Q(xena) \vee R(xena)$ sann. Eftersom en implikation med sant efterled alltid är sann, är därmed hela satsen sann.

exempelfrågor

- Individområde: $I = \{\text{Xena}, \text{Ygritte}, \text{Zorro}\}$
- Värdering: $V(P) = \{\text{Xena}\}$, $V(Q) = \{\text{Xena}, \text{Ygritte}\}$, $V(R) = \{\text{Zorro}\}$, och individerna har sina uppenbara namn.

(11) $\forall x(P(x) \to Q(x) \lor R(x))$

Svar: Sann.

Förklaring (behöver ej skrivas på tentan!): Satsen är sann eftersom alla sätt att byta ut variabeln x i $P(x) \to Q(x) \lor R(x)$ mot individnamn (*xena*, *ygritte*, *zorro*) resulterar i sanna satser:

$P(xena) \to (Q(xena) \lor R(xena))$ är sann. $Q(xena)$ är sann eftersom Xena $\in V(Q)$. Därmed är $Q(xena) \lor R(xena)$ sann. Eftersom en implikation med sant efterled alltid är sann, är därmed hela satsen sann.

$P(ygritte) \to (Q(ygritte) \lor R(ygritte))$ är sann. $P(ygritte)$ är falsk eftersom Ygritte $\notin V(P)$. Eftersom en implikation med falskt förled alltid är sann, är därmed hela satsen sann. Ett analogt resonemang visar att $P(zorro) \to (Q(zorro) \lor R(zorro))$ är sann.

exempelfrågor

- Individområde: $I = \{\text{Xena}, \text{Ygritte}, \text{Zorro}\}$
- Värdering: $V(P) = \{\text{Xena}\}$, $V(Q) = \{\text{Xena}, \text{Ygritte}\}$, $V(R) = \{\text{Zorro}\}$, och individerna har sina uppenbara namn.

(12) $\exists x P(x) \leftrightarrow \exists x (R(x) \land \neg Q(x))$

Svar: Sann.

exempelfrågor

- Individområde: $I = \{\text{Xena}, \text{Ygritte}, \text{Zorro}\}$
- Värdering: $V(P) = \{\text{Xena}\}$, $V(Q) = \{\text{Xena}, \text{Ygritte}\}$, $V(R) = \{\text{Zorro}\}$, och individerna har sina uppenbara namn.

(12) $\exists x P(x) \leftrightarrow \exists x (R(x) \wedge \neg Q(x))$

Svar: Sann.

Förklaring (behöver ej skrivas på tentan!): Satsen är sann eftersom både $\exists x P(x)$ och $\exists x (R(x) \wedge \neg Q(x))$ är sanna.

exempelfrågor

- Individområde: $I = \{\text{Xena}, \text{Ygritte}, \text{Zorro}\}$
- Värdering: $V(P) = \{\text{Xena}\}$, $V(Q) = \{\text{Xena}, \text{Ygritte}\}$, $V(R) = \{\text{Zorro}\}$, och individerna har sina uppenbara namn.

(12) $\exists x P(x) \leftrightarrow \exists x(R(x) \wedge \neg Q(x))$

Svar: Sann.

Förklaring (behöver ej skrivas på tentan!): Satsen är sann eftersom både $\exists x P(x)$ och $\exists x(R(x) \wedge \neg Q(x))$ är sanna.

$\exists x P(x)$ är sann eftersom $P(xena)$ är sann.

exempelfrågor

- Individområde: $I = \{\text{Xena}, \text{Ygritte}, \text{Zorro}\}$
- Värdering: $V(P) = \{\text{Xena}\}$, $V(Q) = \{\text{Xena}, \text{Ygritte}\}$, $V(R) = \{\text{Zorro}\}$, och individerna har sina uppenbara namn.

(12) $\exists x P(x) \leftrightarrow \exists x(R(x) \wedge \neg Q(x))$

Svar: Sann.

Förklaring (behöver ej skrivas på tentan!): Satsen är sann eftersom både $\exists x P(x)$ och $\exists x(R(x) \wedge \neg Q(x))$ är sanna.

$\exists x P(x)$ är sann eftersom $P(xena)$ är sann.

$\exists x(R(x) \wedge \neg Q(x))$ är sann eftersom $(R(zorro) \wedge \neg Q(zorro))$ är sann: Zorro $\in V(R)$ och Zorro $\notin V(Q)$.

exempelfrågor

- Individområde: $I = \{\text{Xena}, \text{Ygritte}, \text{Zorro}\}$
- Värdering: $V(P) = \{\text{Xena}\}$, $V(Q) = \{\text{Xena}, \text{Ygritte}\}$, $V(R) = \{\text{Zorro}\}$, och individerna har sina uppenbara namn.

(13) $\forall x(Q(x) \lor R(x)) \to \exists x(P(x) \land Q(x))$

Svar: Sann.

exempelfrågor

- Individområde: $I = \{\text{Xena}, \text{Ygritte}, \text{Zorro}\}$
- Värdering: $V(P) = \{\text{Xena}\}$, $V(Q) = \{\text{Xena}, \text{Ygritte}\}$, $V(R) = \{\text{Zorro}\}$, och individerna har sina uppenbara namn.

(13) $\forall x(Q(x) \lor R(x)) \to \exists x(P(x) \land Q(x))$

Svar: Sann.

Förklaring (behöver ej skrivas på tentan!): Satsen är sann eftersom $\exists x(P(x) \land Q(x))$ är sann, och en implikation med sant efterled alltid är sann.

exempelfrågor

- Individområde: $I = \{\text{Xena}, \text{Ygritte}, \text{Zorro}\}$
- Värdering: $V(P) = \{\text{Xena}\}$, $V(Q) = \{\text{Xena}, \text{Ygritte}\}$, $V(R) = \{\text{Zorro}\}$, och individerna har sina uppenbara namn.

(13) $\forall x(Q(x) \vee R(x)) \rightarrow \exists x(P(x) \wedge Q(x))$

Svar: Sann.

Förklaring (behöver ej skrivas på tentan!): Satsen är sann eftersom $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$ är sann, och en implikation med sant efterled alltid är sann.

$\exists x(P(x) \wedge Q(x))$ är sann eftersom $P(xena) \wedge Q(xena)$ är sann: Xena $\in V(P)$ och Xena $\in V(Q)$.

predikatlogik: konsekvens och ekvivalens

Predikatlogisk konsekvens och ekvivalens definieras i termer av tolkningar:

En sats B är en predikatlogisk konsekvens av satserna $A_1, \dots, A_n$, skrivet $A_1, \dots, A_n \Rightarrow B$, om och endast om det inte finns någon tolkning under vilken samtliga $A_1, \dots, A_n$ är sanna men B är falsk.

Två satser A, B är predikatlogiskt ekvivalenta, skrivet $A \Leftrightarrow B$, om och endast om A och B har samma sanningsvärde under varje tolkning.

I denna kurs fokuserar vi på att kunna visa när predikatlogisk konsekvens/ekvivalens inte föreligger, dvs. på att konstruera motexempel.

predikatlogik: konsekvens och ekvivalens

Ett motexempel mot $A_1, \ldots, A_n \Rightarrow B$ (dvs., ett *bevis* för att $A_1, \ldots, A_n \not\Rightarrow B$) är en tolkning där samtliga av $A_1, \ldots, A_n$ är sanna, men B falsk.

Exempelfråga. *Visa* $\forall x(P(x) \to Q(x)), Q(sokrates) \not\Rightarrow P(sokrates)$ *genom att ange ett motexempel. Förklara varför det du anger är ett motexempel.*

predikatlogik: konsekvens och ekvivalens

Ett motexempel mot $A_1, \ldots, A_n \Rightarrow B$ (dvs., ett *bevis* för att $A_1, \ldots, A_n \not\Rightarrow B$) är en tolkning där samtliga av $A_1, \ldots, A_n$ är sanna, men B falsk.

Exempelfråga. *Visa* $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)), Q(sokrates) \not\Rightarrow P(sokrates)$ *genom att ange ett motexempel. Förklara varför det du anger är ett motexempel.*

Svar: Ett motexempel är en tolkning där $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$ och $Q(sokrates)$ är sanna, men $P(sokrates)$ falsk.

Följande är en sådan tolkning: $I = \{\text{Sokrates, Platon}\}$, $V(P) = \{\text{Platon}\}$, $V(Q) = \{\text{Sokrates, Platon}\}$, och individerna har sina uppenbara namn.

$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$ är sann eftersom $V(P) \subseteq V(Q)$, och $Q(sokrates)$ är sann eftersom Sokrates $\in V(Q)$.

$P(sokrates)$ är falsk eftersom Sokrates $\notin V(P)$.

predikatlogik: konsekvens och ekvivalens

Ett motexempel mot $A \Leftrightarrow B$ (dvs., ett *bevis* för att $A \not\Leftrightarrow B$) är en tolkning där A och B har olika sanningsvärden.

predikatlogik: konsekvens och ekvivalens

Ett motexempel mot $A \Leftrightarrow B$ (dvs., ett *bevis* för att $A \not\Leftrightarrow B$) är en tolkning där A och B har olika sanningsvärden.

Exempelfråga. *Visa att* $\forall x(P(x) \to Q(x)) \not\Leftrightarrow \forall x(P(x) \land Q(x))$ *genom att ange ett motexempel. Förklara varför det du anger är ett motexempel.*

predikatlogik: konsekvens och ekvivalens

Ett motexempel mot $A \Leftrightarrow B$ (dvs., ett *bevis* för att $A \not\Leftrightarrow B$) är en tolkning där A och B har olika sanningsvärden.

Exempelfråga. *Visa att* $\forall x(P(x) \to Q(x)) \not\Leftrightarrow \forall x(P(x) \land Q(x))$ *genom att ange ett motexempel. Förklara varför det du anger är ett motexempel.*

Svar: Ett motexempel är en tolkning där $\forall x(P(x) \to Q(x))$ har ett annat sanningsvärde än vad $\forall x(P(x) \land Q(x))$ har.

Följande är en sådan tolkning: $I = \{\text{Sokrates, Platon}\}$, $V(P) = \{\text{Platon}\}$, $V(Q) = \{\text{Sokrates, Platon}\}$, och individerna har sina uppenbara namn.

$\forall x(P(x) \to Q(x))$ är sann eftersom $V(P) \subseteq V(Q)$.

$\forall x(P(x) \land Q(x))$ är falsk eftersom $P(sokrates) \land Q(sokrates)$ är falsk: Sokrates ingår inte i $V(P)$.

exempelfrågor

Översätt följande argument till predikatlogik. Om du inför bokstäver för predikat och individtermer, skriv tydligt ut vilka predikat och individtermer de står för.

> Alla idéer saknar fysisk form. Alla abstrakta ting saknar fysisk form. Alltså är alla idéer abstrakta ting.

Visa att slutsatsen i argumentet ovan inte är en predikatlogisk konsekvens av premisserna genom att ange en tolkning som motexempel. Ange tydligt individområdet och värderingen i tolkningen du konstruerar, och förklara varför tolkningen utgör ett motexempel.

> Alla idéer saknar fysisk form. Alla abstrakta ting saknar fysisk form. Alltså är alla idéer abstrakta ting.

Svar: Vi börjar med att ge en översättning av argumentet.

exempelfrågor

> Alla idéer saknar fysisk form. Alla abstrakta ting saknar fysisk form. Alltså är alla idéer abstrakta ting.

Svar: Vi börjar med att ge en översättning av argumentet.

$I =$ är en idé, $F =$ har fysisk form, $A =$ är abstrakt.

exempelfrågor

Alla idéer saknar fysisk form. Alla abstrakta ting saknar fysisk form. Alltså är alla idéer abstrakta ting.

Svar: Vi börjar med att ge en översättning av argumentet.

$I =$ är en idé, $F =$ har fysisk form, $A =$ är abstrakt.

1. $\forall x(I(x) \to \neg F(x))$
   Alla idéer saknar fysisk form

exempelfrågor

Alla idéer saknar fysisk form. Alla abstrakta ting saknar fysisk form. Alltså är alla idéer abstrakta ting.

Svar: Vi börjar med att ge en översättning av argumentet.

$I =$ är en idé, $F =$ har fysisk form, $A =$ är abstrakt.

1. $\forall x(I(x) \to \neg F(x))$
   Alla idéer saknar fysisk form
2. $\forall x(A(x) \to \neg F(x))$
   Alla abstrakta ting saknar fysisk form

exempelfrågor

> Alla idéer saknar fysisk form. Alla abstrakta ting saknar fysisk form. Alltså är alla idéer abstrakta ting.

Svar: Vi börjar med att ge en översättning av argumentet.

$I =$ är en idé, $F =$ har fysisk form, $A =$ är abstrakt.

1. $\forall x(I(x) \to \neg F(x))$
   Alla idéer saknar fysisk form
2. $\forall x(A(x) \to \neg F(x))$
   Alla abstrakta ting saknar fysisk form

---

3. $\forall x(I(x) \to A(x))$
   Alla idéer är abstrakta ting

exempelfrågor

1. $\forall x(I(x) \to \neg F(x))$
2. $\forall x(A(x) \to \neg F(x))$

---

3. $\forall x(I(x) \to A(x))$

Vi anger sedan en tolkning där premisserna är sanna, men slutsatsen falsk.

exempelfrågor

1. $\forall x(I(x) \to \neg F(x))$
2. $\forall x(A(x) \to \neg F(x))$

---

3. $\forall x(I(x) \to A(x))$

Vi anger sedan en tolkning där premisserna är sanna, men slutsatsen falsk.

Intuitivt: vi behöver en tolkning där

- alla som har egenskapen I saknar egenskapen F,
- alla som har egenskapen A saknar egenskapen F,
- inte alla som har egenskapen I har egenskapen A.

exempelfrågor

1. $\forall x(I(x) \to \neg F(x))$
2. $\forall x(A(x) \to \neg F(x))$

---

3. $\forall x(I(x) \to A(x))$

- Individområde: {Xena, Ygritte, Zorro}
- Värdering: $V(I) = \{$Xena, Ygritte$\}$, $V(A) = \{$Xena, Zorro$\}$ $V(F) = \{\}$.

I denna tolkning är premisserna sanna men slutsatsen falsk:

exempelfrågor

1. $\forall x(I(x) \rightarrow \neg F(x))$
2. $\forall x(A(x) \rightarrow \neg F(x))$

---

3. $\forall x(I(x) \rightarrow A(x))$

- Individområde: {Xena, Ygritte, Zorro}
- Värdering: $V(I) = \{\text{Xena, Ygritte}\}$, $V(A) = \{\text{Xena, Zorro}\}$ $V(F) = \{\}$.

I denna tolkning är premisserna sanna men slutsatsen falsk:

- alla som har egenskapen I saknar egenskapen F: Xena $\notin V(F)$ och Ygritte $\notin V(F)$,

exempelfrågor

1. $\forall x(I(x) \to \neg F(x))$
2. $\forall x(A(x) \to \neg F(x))$

---

3. $\forall x(I(x) \to A(x))$

- Individområde: {Xena, Ygritte, Zorro}
- Värdering: $V(I) = \{$Xena, Ygritte$\}$, $V(A) = \{$Xena, Zorro$\}$ $V(F) = \{\}$.

I denna tolkning är premisserna sanna men slutsatsen falsk:

- alla som har egenskapen I saknar egenskapen F: Xena $\notin V(F)$ och Ygritte $\notin V(F)$,
- alla som har egenskapen A saknar egenskapen F: Xena $\notin V(F)$ och Zorro $\notin V(F)$, och

exempelfrågor

1. $\forall x(I(x) \rightarrow \neg F(x))$
2. $\forall x(A(x) \rightarrow \neg F(x))$

---

3. $\forall x(I(x) \rightarrow A(x))$

- Individområde: {Xena, Ygritte, Zorro}
- Värdering: $V(I) = \{$Xena, Ygritte$\}$, $V(A) = \{$Xena, Zorro$\}$ $V(F) = \{\}$.

I denna tolkning är premisserna sanna men slutsatsen falsk:

- alla som har egenskapen I saknar egenskapen F: Xena $\notin V(F)$ och Ygritte $\notin V(F)$,
- alla som har egenskapen A saknar egenskapen F: Xena $\notin V(F)$ och Zorro $\notin V(F)$, och
- inte alla som har egenskapen I har egenskapen A: Ygritte $\in V(I)$ men Ygritte $\notin V(A)$.

Frågor?