Predikatlogik

Del 3: Konsekvens och ekvivalens

intro

I denna föreläsning definierar vi begreppen

- predikatlogisk konsekvens (giltighet),
- predikatlogisk ekvivalens

och visar hur tolkningar används för att ange motexempel mot påstådd predikatlogisk konsekvens eller ekvivalens.

giltighet och predikatlogisk konsekvens

Ett argument är giltigt om och endast om det inte finns någon möjlig situation i vilken alla argumentets premisser är sanna, men slutsatsen falsk.

För satslogiska argument preciserades denna idé som satslogisk konsekvens, som definierades i termer av simultana värderingar.

En sats B är en satslogisk konsekvens av satserna $A_1, \ldots, A_n$, om och endast om det inte finns någon simultan värdering under vilken samtliga $A_1, \ldots, A_n$ är sanna men B är falsk.

giltighet och predikatlogisk konsekvens

I predikatlogiken ersätts satslogiska värderingar med tolkningar:

En sats B är en predikatlogisk konsekvens av satserna $A_1, \ldots, A_n$, om och endast om det inte finns någon tolkning under vilken samtliga $A_1, \ldots, A_n$ är sanna men B är falsk.

Att B är en predikatlogisk konsekvens av $A_1, \ldots, A_n$ skrivs

$$A_1, \ldots, A_n \Rightarrow B.$$

Om $A_1, \ldots, A_n \Rightarrow B$ säger vi att argument på samma form är predikatlogiskt giltiga.

predikatlogisk konsekvens

För att avgöra att $A_1, \ldots, A_n \Rightarrow B$ måste vi alltså undersöka alla tolkningar under vilka $A_1, \ldots, A_n$ är sanna.

I satslogiken kan giltighet alltid kan avgöras med ändliga sanningstabeller.

För predikatlogiken som inkluderar relationspredikat finns ingen motsvarande metod som garanterat hjälper oss avgöra att ett givet predikatlogiskt argument är giltigt (inom en ändlig tidsrymd).

Förenklat följer detta av att tolkningar kan vara oändligt stora, i bemärkelsen att individområdet kan vara oändligt (t.ex. mängden av naturliga tal).

predikatlogisk konsekvens

För den version av predikatlogik som vi fokuserat på (där vi inte inkluderar relationspredikat), går det alltid att avgöra om konsekvens föreligger genom att undersöka ändliga tolkningar.

Om det finns motexempel mot att konsekvens föreligger, så går sådana alltid att hitta i tolkningar där individområdet innehåller max 2^n individer, där $n =$ antalet predikat(typer) som förekommer i argumentet.

Detta kan förstås ändå innebära att mängden tolkningar vi behöver undersöka är mycket stor (särskilt om konsekvens faktiskt föreligger).

predikatlogisk konsekvens

Vi kommer därför att fokusera på att påvisa att logisk konsekvens inte föreligger: dvs. fall där

$$A_1, \ldots, A_n \nRightarrow B.$$

För att visa att en sats B inte är en predikatlogisk konsekvens av $A_1, \ldots, A_n$ räcker det ju att hitta en tolkning där $A_1, \ldots, A_n$ är sanna, men B falsk.

exempel

Följande gäller:

$$\exists x P(x), \exists Q(x) \not\Rightarrow \exists x(P(x) \wedge Q(x))$$

För att hitta ett motexempel är det ofta hjälpsamt att förklara för sig själv vad som minst behövs för att göra premisserna sanna, men slutsatsen falsk. Vi kan resonera som följer.

För att $\exists x P(x)$ och $\exists x Q(x)$ ska vara sanna måste det finnas en individ i $V(P)$ och en i $V(Q)$.

För att $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$ ska vara falsk får ingen individ finnas med i både $V(P)$ i $V(Q)$.

Följande tolkning (I, V) utgör därmed ett motexempel: $I = \{1, 2\}$, $V(P) = \{1\}$, $V(Q) = \{2\}$.

exempel

Följande gäller:

$$\exists x Q(x), \forall x (P(x) \to Q(x)) \not\Rightarrow \exists x P(x)$$

Följande tolkning (I, V) utgör ett motexempel: $I = \{x \mid x \text{ existerar}\}$, $V(P) = \{x \mid x \text{ är en enhörning}\}$, $V(Q) = \{x \mid x \text{ är en filosof}\}$.

Eftersom filosofer existerar är $\exists x Q(x)$ sann i (I, V).

Eftersom enhörningar inte existerar är $(P(x) \to Q(x))$ också sann i (I, V): $V(P) = \emptyset$, så att $V(P) \subseteq V(Q)$.

Men detta innebär också att $\exists x P(x)$ är falsk i (I, V): det finns ingen individ i I som har egenskapen $V(P)$.

exempel

Följande argument är inte predikatlogisk giltigt.

1. Alla människor är däggdjur.
2. Alla katter är däggdjur.

---

3. Alla människor är katter.

exempel

Följande argument är inte predikatlogisk giltigt.

1. Alla människor är däggdjur.
2. Alla katter är däggdjur.

---

3. Alla människor är katter.

Översättning:

1. $\forall x(\textsc{människa}(x) \rightarrow \textsc{däggdjur}(x))$
2. $\forall x(\textsc{katt}(x) \rightarrow \textsc{däggdjur}(x))$

---

3. $\forall x(\textsc{människa}(x) \rightarrow \textsc{katt}(x))$

exempel

1. $\forall x(\textsc{människa}(x) \rightarrow \textsc{däggdjur}(x))$
2. $\forall x(\textsc{katt}(x) \rightarrow \textsc{däggdjur}(x))$

---

3. $\forall x(\textsc{människa}(x) \rightarrow \textsc{katt}(x))$

Följande tolkning (I, V) utgör ett motexempel. Låt $I = \{\text{Ali, Bea}\}$, $V(\textsc{däggdjur}) = \{\text{Ali, Bea}\}$ $V(\textsc{människa}) = \{\text{Ali}\}$, $V(\textsc{katt}) = \{\text{Bea}\}$.

Här är ju $\forall x(\textsc{människa}(x) \rightarrow \textsc{däggdjur}(x))$ sann: Ali är ett däggdjur.

Även $\forall x(\textsc{katt}(x) \rightarrow \textsc{däggdjur}(x))$ är sann: Bea är ett däggdjur.

Men $\forall x(\textsc{människa}(x) \rightarrow \textsc{katt}(x))$ är falsk: Ali är människa, men inte katt.

predikatlogisk ekvivalens

Satslogisk ekvivalens definierades i termer av värderingar:

> Två satser är satslogiskt ekvivalenta om och endast om de har samma sanningsvärde under varje simultan värdering av dem.

Vi får en definition av predikatlogisk konsekvens genom att substituera ”simultan värdering” mot ”tolkning”:

> Två satser är predikatlogiskt ekvivalenta om och endast om de har samma sanningsvärde under varje tolkning.

Motexempel mot ekvivalens är alltså tolkningar där den ena satsen är sann, men den andra falsk.

predikatlogisk ekvivalens

Att A och B är predikatlogiskt ekvivalenta skrivs

$$A \Leftrightarrow B.$$

Att A och B inte är predikatlogiskt ekvivalenta skrivs

$$A \not\Leftrightarrow B.$$

Liksom för predikatlogisk konsekvens, kommer vi att fokusera på fall där ekvivalens inte föreligger.

exempel

$$\forall x \neg P(x) \not\Leftrightarrow \neg \forall x P(x)$$

För att $\forall x \neg P(x)$ ska vara sann måste det gälla, för varje individ i, att $i \notin V(P)$ ("alla är icke-P").

För att $\neg \forall x P(x)$ ska vara sann måste det gälla att, för någon individ i, att $i \notin V(P)$ ("inte alla är P").

I följande tolkning (I, V) är därför $\forall x \neg P(x)$ falsk, men $\neg \forall x P(x)$ sann: $I = \{1, 2\}$, $V(P) = \{1\}$.

exempel

$$\forall x(P(x) \lor Q(x)) \not\Leftrightarrow \forall x P(x) \lor \forall x Q(x)$$

För att $\forall x(P(x) \lor Q(x))$ ska vara sann krävs att varje individ ingår i

- $V(P)$, eller
- $V(Q)$.

För att $\forall x P(x) \lor \forall x Q(x)$ ska vara sann krävs att:

- varje individ ingår i $V(P)$, eller
- varje individ ingår i $V(Q)$.

Följande tolkning (I, V) utgör därmed ett motexempel: $I = \{1, 2\}$, $V(P) = \{1\}$, $V(Q) = \{2\}$.

sammanfattning

Vi har definierat begreppen predikatlogisk konsekvens och ekvivalens, och sett hur vi kan använda tolkningar för att visa när predikatlogisk konsekvens eller ekvivalens *inte* föreligger.

Ett motexempel mot en predikatlogisk konsekvens $A_1, \ldots, A_n \Rightarrow B$ är en tolkning där $A_1, \ldots, A_n$ är sanna men B falsk.

Ett motexempel mot en predikatlogisk ekvivalens $A \Leftrightarrow B$ är en tolkning där A och B har olika sanningsvärden.