Predikatlogik

Del 2: Semantik

intro

I denna föreläsning bekantar vi oss med predikatlogikens semantik: det som bestämmer vad predikatlogiska uttryck betyder.

Precis som för satslogiken är predikatlogikens semantik extensionell, och anger regler för att avgöra sanningsvärdet hos predikatlogiska formler.

Vi kommer (i allt väsentligt) att behålla den satslogiska semantiken för konnektiv, men behöver utöka semantiken för att ange sanningsvillkor för

- Atomära satser (predikat och individtermer),
- Kvantifierade satser.

intro

För att ge en tillfredsställande semantik för denna typ av uttryck relativiseras sanning i predikatlogiken till tolkningar, som i sin tur består av

- individområden,
- värderingar.

Vi introducerar först dessa begrepp i ordning, och använder dem sedan för att ange och illustrera sanningsvillkoren för satser i predikatlogiken.

predikatlogikens sanningsbegrepp

Satsen (1) uttrycker att *alla är människor*. Är detta sant eller falskt?

(1) $\forall x \textsc{människa}(x)$

Det rätta svaret beror på hur ”alla” ska förstås. Under en förståelse av ”alla” som ”alla levande varelser” är (1) falsk; under en förståelse av ”alla” som ”alla i detta zoom-möte” är (1) sann.

I predikatlogiken fångas denna typ av variation genom att sanning hos satser relativiseras till individområden.

individområden

Ett individområde I är en mängd objekt (individer) av vilket slag som helst (personer, städer, tal, abstrakta idéer...).

Den noterade variationen i sanningsvärde hos (1) kan ses som att dess sanningsvärde beror på vilket individområde vi antar.

(1) $\forall x \textsc{människa}(x)$

Givet $I = \{x \mid x \text{ är en levande varelse}\}$ så är (1) falsk: inte alla individer i denna mängd är människor.

Givet $I = \{x \mid x \text{ deltar i detta zoom-möte}\}$ så är (1) sann: alla individer i denna mängd är människor.

värderingar

I satslogiken var en värdering en tilldelning av extensioner (sanningsvärden) till atomära satser.

Atomära satser i predikatlogiken består av predikat och individtermer, och en värdering blir i predikatlogiken istället en tilldelning av extensioner till dessa två komponenter.

Värdering. En värdering V av ett antal satser $A_1, \ldots, A_n$ är en funktion som, givet ett individområde I, tilldelar varje

- individterm som förekommer i $A_1, \ldots, A_n$ en individ från I,
- predikat som förekommer i $A_1, \ldots, A_n$ en mängd av individer från I.

värderingar

Exempel. V är en värdering av satserna $\textsc{filosof}(ali)$ och $\textsc{logiker}(bea)$ och individområdet $\{\text{Ali, Bea}\}$:

- $V(ali) = \text{Ali}$,
- $V(bea) = \text{Bea}$,
- $V(\textsc{filosof}) = \{\text{Ali}\}$,
- $V(\textsc{logiker}) = \{\text{Ali, Bea}\}$.

Notation: $V(t)$ betecknar den individ som någon värdering V tilldelar individtermen t, och $V(P)$ betecknar den mängd av individer som V tilldelar predikatet P.

tolkningar

Sanning i predikatlogiken är helt relativ till individområden och värderingar, tillsammans kallat tolkningar.

Tolkning. Ett individområde I tillsammans med en värdering V av satserna $A_1, \ldots, A_n$ utgör en *tolkning* av $A_1, \ldots, A_n$ (betecknat (I, V)).

Satser sägs vara sanna i en tolkning om de är just sanna enligt tolkningen, och falska i en tolkning om de är falska enligt tolkningen.

sanningsvillkor: atomära satser

En atomär sats $P(a)$ är sann i (I, V) omm $V(a)$ ingår i $V(P)$.

Exempel. Tag tolkningen (I, V), där $I = \{\text{Ali}, \text{Bea}\}$, och

- $V(ali) = \text{Ali}$,
- $V(bea) = \text{Bea}$,
- $V(\textsc{filosof}) = \{\text{Ali}\}$,
- $V(\textsc{logiker}) = \{\text{Ali}, \text{Bea}\}$.

$\textsc{logiker}(ali)$ är sann i (I, V) eftersom $\text{Ali} \in \{\text{Ali}, \text{Bea}\}$.

$\textsc{filosof}(bea)$ är falsk i (I, V) eftersom $\text{Bea} \notin \{\text{Ali}\}$.

sanningsvillkor: konnektiv

Sanningsvillkoren hos predikatlogiska satser A, B som kombineras med konnektiv är desamma som i satslogiken:

- $\neg A$ är sann i (I, V) omm A är falsk i (I, V).
- $A \wedge B$ är sann i (I, V) omm både A och B är sanna i (I, V).
- $A \vee B$ är sann i (I, V) omm A eller B är sann i (I, V).
- $A \rightarrow B$ är sann i (I, V) omm A är falsk i (I, V) eller B är sann i (I, V).
- $A \leftrightarrow B$ är sann i (I, V) omm A och B har samma sanningsvärde i (I, V).

sanningsvillkor: konnektiv

Exempel. Tag tolkningen (I, V), där $I = \{\text{Ali}, \text{Bea}\}$, och

- $V(ali) = \text{Ali}$,
- $V(bea) = \text{Bea}$,
- $V(\textsc{filosof}) = \{\text{Ali}\}$,
- $V(\textsc{logiker}) = \{\text{Ali}, \text{Bea}\}$.

$\neg\textsc{filosof}(bea)$ är sann i (I, V) eftersom $\textsc{filosof}(bea)$ är falsk i (I, V): $\text{Bea} \notin V(\textsc{filosof})$.

$\neg\textsc{logiker}(bea)$ är falsk i (I, V) eftersom $\textsc{logiker}(bea)$ är sann i (I, V): $\text{Bea} \in V(\textsc{logiker})$.

sanningsvillkor: konnektiv

Exempel. Tag tolkningen (I, V), där $I = \{\text{Ali}, \text{Bea}\}$, och

- $V(ali) = \text{Ali}$,
- $V(bea) = \text{Bea}$,
- $V(\textsc{filosof}) = \{\text{Ali}\}$,
- $V(\textsc{logiker}) = \{\text{Ali}, \text{Bea}\}$.

$\textsc{filosof}(ali) \vee \textsc{filosof}(bea)$ är sann i (I, V) eftersom $\textsc{filosof}(ali)$ är sann i (I, V): $\text{Ali} \in V(\textsc{filosof})$.

$\neg\textsc{logiker}(bea) \vee \textsc{filosof}(bea)$ är falsk i (I, V) eftersom $\textsc{logiker}(bea)$ är sann i (I, V): $\text{Bea} \in V(\textsc{logiker})$; och $\textsc{filosof}(bea)$ är falsk i (I, V): $\text{Bea} \notin V(\textsc{logiker})$.

sanningsvillkor: konnektiv

Exempel. Tag tolkningen (I, V), där $I = \{\text{Ali}, \text{Bea}\}$, och

- $V(ali) = \text{Ali}$,
- $V(bea) = \text{Bea}$,
- $V(\textsc{filosof}) = \{\text{Ali}\}$,
- $V(\textsc{logiker}) = \{\text{Ali}, \text{Bea}\}$.

$\textsc{logiker}(ali) \to \textsc{filosof}(ali)$ är sann i (I, V) eftersom $\textsc{filosof}(ali)$ är sann i (I, V): $\text{Ali} \in V(\textsc{filosof})$.

$\textsc{logiker}(bea) \to \textsc{filosof}(bea)$ är falsk i (I, V) eftersom $\textsc{logiker}(bea)$ är sann i (I, V) och $\textsc{filosof}(bea)$ är falsk i (I, V): $\text{Bea} \in V(\textsc{logiker})$ men $\text{Bea} \notin V(\textsc{filosof})$.

sanningsvillkor: kvantifierade satser

Låt oss förutsätta att värderingar ger varje individ i individområdet ett namn: en individterm som betecknar just den individen.

En sats $\forall x A$, där A som mest har x fri, är sann i (I, V) omm följande gäller för alla individer b i I: satsen som fås av att byta ut förekomsterna av x i A mot namnet på b är sann i (I, V).

En sats $\exists x A$, där A som mest har x fri, är sann i (I, V) omm följande gäller för någon individ b i I: satsen som fås av att byta ut förekomsterna av x i A mot namnet på b är sann i (I, V).

sanningsvillkor: kvantifierade satser

Exempel. Tag tolkningen (I, V), där $I = \{\text{Ali}, \text{Bea}\}$, och

- $V(ali) = \text{Ali}$,
- $V(bea) = \text{Bea}$,
- $V(\textsc{filosof}) = \{\text{Ali}\}$,
- $V(\textsc{logiker}) = \{\text{Ali}, \text{Bea}\}$.

$\forall x \textsc{logiker}(x)$ är sann i (I, V) eftersom

- $\textsc{logiker}(ali)$ är sann i (I, V), och
- $\textsc{logiker}(bea)$ är sann i (I, V).

$\forall x \textsc{filosof}(x)$ är falsk i (I, V) eftersom $\textsc{filosof}(bea)$ är falsk.

sanningsvillkor: kvantifierade satser

Exempel. Tag tolkningen (I, V), där $I = \{\text{Ali}, \text{Bea}\}$, och

- $V(ali) = \text{Ali}$,
- $V(bea) = \text{Bea}$,
- $V(\textsc{filosof}) = \{\text{Ali}\}$,
- $V(\textsc{logiker}) = \{\text{Ali}, \text{Bea}\}$.

$\exists x \textsc{filosof}(x)$ är sann i (I, V) eftersom $\textsc{filosof}(ali)$ är sann.

$\exists x(\textsc{filosof}(x) \land \neg\textsc{logiker}(x))$ är falsk i (I, V) eftersom

- $\textsc{filosof}(ali) \land \neg\textsc{logiker}(ali)$ är falsk i (I, V), och
- $\textsc{filosof}(bea) \land \neg\textsc{logiker}(bea)$ är falsk i (I, V).

fler exempel

En sats på formen $\forall x P(x)$ är alltså sann i alla tolkningar (I, V) där $I = V(P)$, dvs. där alla individer har egenskapen P enligt V. I alla andra tolkningar är satsen falsk.

En sats på formen $\exists x P(x)$ är sann i alla tolkningar (I, V) där $I \subseteq V(P)$, dvs. där några individer har egenskapen P enligt V. I alla andra tolkningar är satsen falsk.

predikatlogik och mängder

En sats på formen $\forall x P(x)$ är alltså sann i alla tolkningar (I, V) där $I = V(P)$, dvs. där alla individer har egenskapen P enligt V. I alla andra tolkningar är satsen falsk.

En sats på formen $\exists x P(x)$ är sann i alla tolkningar (I, V) där $I \subseteq V(P)$, dvs. där några individer har egenskapen P enligt V. I alla andra tolkningar är satsen falsk.

Mer komplexa predikatlogiska satser kan också ses som uttryckandes relationer mellan mängder.

allkvantifierade implikationer

En sats på formen

$$\forall x(P(x) \to Q(x))$$

är sann i alla tolkningar (I, V) där

$$V(P) \subseteq V(Q)$$

,
dvs. när alla individer har som har egenskapen P har egenskapen Q. I alla andra tolkningar är satsen falsk.

existenskvantifierade konjunktioner

En sats på formen

$$\exists x(P(x) \wedge Q(x))$$

är sann i alla tolkningar (I, V) där, för något $b \in I$:

$$b \in V(P) \text{ och } b \in V(Q),$$

dvs. där $V(P)$ och $V(Q)$ har något element gemensamt. I alla andra tolkningar är satsen falsk.

allkvantifierade disjunktioner

En sats på formen

$$\forall x(P(x) \vee Q(x))$$

är sann i alla tolkningar (I, V) där, för alla $b \in I$:

$$b \in V(P) \text{ eller } b \in V(Q),$$

dvs. när $V(P)$ och $V(Q)$ tillsammans täcker hela individområdet.

sammanfattning

I denna föreläsning introducerades predikatlogikens semantik genom införandet av begreppen

- individområde,
- värdering,
- tolkning (= individområde + värdering).

Vi såg att sanning i predikatlogiken är relativiserad till tolkningar, på så vis att satser i språket kan sägs vara sanna/falska endast i förhållande till en tolkning.

Nästa tillfälle använder vi detta för att definiera predikatlogiskt giltiga argument genom begreppet predikatlogisk konsekvens.