Predikatlogik

Del 1: Syntax och översättninng

Många argument är giltiga trots att de inte har någon tydlig satslogisk struktur.

1. Sokrates är filosof.

---

2. Det finns någon som är filosof.

1. Alla människor är dödliga.
2. Sokrates är en människa.

---

3. Sokrates är dödlig.

Ovanstående argument är predikatlogiskt giltiga.

intro

Det predikatlogiska språket är en utökning av det satslogiska språket:

- Atomära satser ges ytterligare logisk struktur
- Kvantifikatorer införs, vilket leder till nya typer av komplexa satser.

Semantiken för predikatlogik är en utökning av den satslogiska semantiken:

- Satsers sanning eller falskhet beror på inte bara på kompositionen av konnektiv, utan även på egenskaper hos individer.

komponenter

Predikatlogiken innehåller (utöver parenteser) följande typer av uttryck:

- De satslogiska konnektiven ($\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$)
- Predikat (LÄRARE, FILOSOF, L, P)
- Individtermer (*sokrates*, *hana*, s, h)
- Individvariabler (x, y, z...)
- Kvantifikatorer ($\forall$, $\exists$)

I denna föreläsning introducerar vi de nya typerna av uttryck, hur de kombineras, och vad de motsvarar i naturligt språk.

atomära satser

De minsta uttrycken i predikatlogiken som kan uttrycka bestämda påståenden kallas för atomära satser.

Atomära satser består i sin tur av två typer av uttryck:

- Individtermer: motsvaras i svenskan av ord eller uttryck som betecknar en enskild entitet; exempelvis en person, ett föremål, ett fenomen, en abstrakt idé, osv.
- Predikat: motsvaras i svenskan av ord eller uttryck som tillskriver egenskaper till eller anger relationer mellan individer.

atomära satser

(1) $\overbrace{\text{Sokrates}}^{\text{ind}}\ \overbrace{\text{är filosof}}^{\text{pred}}$.

(2) $\overbrace{\text{Solen}}^{\text{ind}}\ \overbrace{\text{skiner}}^{\text{pred}}$.

(3) $\overbrace{\text{Läraren på metodkursen}}^{\text{ind}}\ \overbrace{\text{undervisar i formell logik}}^{\text{pred}}$.

(4) $\overbrace{\text{Stockholm}}^{\text{ind}}\ \overbrace{\text{är mindre än}}^{\text{pred}}\ \overbrace{\text{Malmö}}^{\text{ind}}$.

atomära satser

Individtermer kan betecknas med enstaka gemener (*a*, *b*, *c*...) eller någon sekvens av gemener (t.ex. *hana*).[1]

Predikat kan betecknas med enstaka versaler (A, B, C...), men kommer i dessa slides företrädesvis att betecknas med sekvenser av versaler (t.ex. LÄRARE).

	svenska	predikatlogik
ind.	Sokrates	*s* / *sokrates*
pred.	är filosof	F / FILOSOF

[1] Olika presentationer av det predikatlogiska språket begränsar ”likheten” hos individtermer och predikat till uttryck i naturligt språk olika mycket. Alla (etablerade) varianter är tillåtna på denna kurs.

I predikatlogiken framhävs den logiska formen hos atomära satser genom att predikatet skrivs först, följt av individtermerna inom parentes.

(5) Solen skiner.
Översättning: SKINER(*solen*)

(6) Sokrates är filosof.
Översättning: FILOSOF(*sokrates*)

(7) Läraren på metodkursen undervisar i formell logik.
Översättning: UNDERVISAR(*läraren*)

(8) Stockholm är mindre än Malmö.
Översättning: MINDRE-ÄN(*stockholm, malmö*)

individvariabler

Vi kan nu delvis översätta följande till predikatlogik.

1. Alla människor är dödliga.
2. Sokrates är en människa.

---

3. Sokrates är dödlig.

Översättning:

1. Alla människor är dödliga.
2. MÄNNISKA(*sokrates*)

---

3. DÖDLIG(*sokrates*)

Premiss 1 kan inte översättas ännu: ”Alla människor” verkar inte motsvara varken en individterm eller ett predikat.

individvariabler

För att tydligare se strukturen hos premissen kan vi göra följande omskrivning:

1. För alla ting gäller: Om det är en människa så är det dödligt.
2. MÄNNISKA(*sokrates*)

---

3. DÖDLIG(*sokrates*)

Här använder vi pronomen (”det”) för att referera till ett godtyckligt ting.

Premissen säger då att ”om … så…”-påståendet ska vara sant oavsett vilket ting vi tänker oss att ”det” står för: påståendet ska vara sant om alla ting.

individvariabler

I predikatlogiken används individvariabler på sättet vi använde ”det”.

Som tecken för individvariabler används $x, y, z, \ldots$

En variabel representerar ett okänt värde. Jämför med det matematiska uttrycket

$$y = 2 \cdot x + 5$$

Här betecknar x och y okända tal.

I avsaknad av ett sammanhang som specificerar vad ”det” refererar till, så kan vi inte avgöra om (9) är sann/falsk.

(9) Det springer.

På liknande sätt uttrycker (10) inte något bestämt påstående, eftersom x representerar något okänt:

(10) $\textsc{springer}(x)$

former och satser

För att göra skillnad på formler som uttrycker bestämda påståenden, som (11), och de som inte gör det, som (10), inkluderar predikatlogiken även begreppet sats.

(10) $\textsc{springer}(x)$

(11) $\textsc{springer}(hana)$

Satser är i predikatlogiken formler som uttrycker bestämda påståenden; som vi kan avgöra är sanna eller falska.

Både (10) och (11) är alltså formler, men bara (11) är en sats.

individvariabler

Vi kan översätta (12) med individvariabler till satsen (13):

(12) För alla ting gäller: Om det är en människa så är det dödligt.

(13) För alla x gäller: Om x är en människa så är x dödlig.

Genom att använda skrivsättet som vi nyss införde, tillsammans med satslogiska konnektiv, blir detta i sin tur (14):

(14) För alla x gäller: $\textsc{människa}(x) \rightarrow \textsc{dödlig}(x)$

individvariabler

Vi är nu ett steg närmare en komplett översättning av ursprungsargumentet.

1. För alla x gäller: $\textsc{människa}(x) \rightarrow \textsc{dödlig}(x)$
2. $\textsc{människa}(\textit{sokrates})$

---

3. $\textsc{dödlig}(\textit{sokrates})$

För att till fullo översätta premiss 1 behöver vi kvantifikatorer.

kvantifikatorer

Predikatlogiken innehåller två kvantifikatorer: allkvantifikatorn och existenskvantifikatorn.

Allkvantifikatorn skrivs $\forall$, och motsvarar ”för alla ting gäller att”.

Existenskvantifikatorn skrivs $\exists$, och motsvarar ”det finns någonting för vilket det gäller att”.

kvantifikatorer

Kvantifikatorer placeras tillsammans med en individvariabel framför en formel, och bildar då en ny formel.

Om vi kombinerar formeln (10) med allkvantifikatorn och x, får vi satsen (15).

(10) $\textsc{filosof}(x)$

(15) $\forall x\textsc{filosof}(x)$

Detta uttrycker att *för alla ting gäller att de är filosofer*, eller på mer naturlig svenska, att *alla är filosofer*.

kvantifikatorer

Om vi istället kombinerar formeln (10) med existenskvantifikatorn och x, får vi satsen (16).

(10) $\textsc{filosof}(x)$

(16) $\exists x\textsc{filosof}(x)$.

Detta uttrycker att *det finns någonting för vilket det gäller att det är en filosof*, eller på mer naturlig svenska, att *någon är filosof*.

Sammanfattningsvis:

- $\forall$ motsvarar uttryck som ”alla”, ”samtliga”,
- $\exists$ motsvarar uttryck som ”några”, ”något”, ”det finns någonting/ett/en”.

räckvidd

Kvantifikatorer kan alltså göra om icke-satser till satser, dvs. till saker som uttrycker bestämda påståenden.

Detta berodde på att kvantifikatorerna band variabelförekomsterna i de ursprungliga formlerna: de angav hur variabelförekomsterna skulle förstås.

Regel: Kvantifikatorer binder alla förekomster av matchande variabeltyp i formeln som står direkt till höger om kvantifikatorn, och inga andra.

räckvidd

Följande uttrycker alltså fortfarande ett obestämt påstående: $\forall$ har bara räckvidd över formeln $\textsc{filosof}(x)$.

(17) $\forall x\textsc{filosof}(x) \rightarrow \textsc{logiker}(x)$
Ung. *Om alla är filosofer så är den logiker*

Följande uttrycker också ett obestämt påstående: $\forall$ binder bara förekomster av x, inte av y.

(18) $\forall x\textsc{filosof}(y)$
Ung. *den är filosof*

kvantifikatorer

Om vi vill att en kvantifikator ska ha räckvidd över en komplex formel—en formel innehållande konnektiv—behöver vi omge den komplexa formeln med parenteser.

I följande har $\forall$ räckvidd över hela implikationen:

(19) $\forall x(\textsc{filosof}(x) \rightarrow \textsc{logiker}(x))$
Ung. *Alla filosofer är logiker*.
(Jfr. *För alla x gäller att: om x är filosof, så är x logiker*.)

Variabelförekomster som binds av en kvantifikator kallas bundna, och de som inte gör det kallas fria.

kvantifikatorer

Nu har vi alla komponenter som krävs för att ge en komplett översättning av det ursprungliga argumentet:

1. Alla människor är dödliga.
2. Sokrates är en människa.

---

3. Sokrates är dödlig.

Översättning:

1. $\forall x(\textsc{människa}(x) \to \textsc{dödlig}(x))$
2. $\textsc{människa}(\mathit{sokrates})$

---

3. $\textsc{dödlig}(\mathit{sokrates})$

sammanfattning: det predikatlogiska språket

Predikatlogiken innehåller alltså, utöver parenteser:

- De satslogiska konnektiven ($\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$)
- Predikat (LÄRARE, FILOSOF, L, P)
- Individtermer (*sokrates*, *hana*, *s*, *h*)
- Individvariabler (x, y, z...)
- Kvantifikatorer ($\forall$, $\exists$)

sammanfattning: det predikatlogiska språket

Atomära formler är kombinationer av predikat med individtermer eller -variabler.

(20) $\textsc{filosof}(\textit{sokrates})$
Sokrates är filosof.

Komplexa formler är kombinationer av formler med kvantifikatorer och/eller satslogiska konnektiv.

(21) $\forall x \textsc{filosof}(x)$
Alla är filosofer.

(22) $\textsc{filosof}(\textit{sokrates}) \wedge \textsc{springer}(\textit{hana})$
Sokrates är filosof och Hana springer.

(23) $\forall x(\textsc{filosof}(x) \rightarrow \textsc{springer}(x))$
Alla filosofer springer.

översättning

Vi ger några fler exempel på översättningar till predikatlogiken.

Vi såg att ”Alla A är B”-påståenden uttrycks med allkvantifikator + implikation:

(24) $\forall x(\textsc{människa}(x) \rightarrow \textsc{dödlig}(x))$
Alla människor är dödliga.

Motsvarande uttrycks ”Några A är B”-påståenden med existenskvantifikator + konjunktion:

(25) $\exists x(\textsc{filosof}(x) \land \textsc{smart}(x))$
Några filosofer är smarta.

översättning

(26) $\forall x(\textsc{människa}(x) \rightarrow \textsc{dödlig}(x))$
Alla människor är dödliga.

(27) $\exists x(\textsc{filosof}(x) \wedge \textsc{smart}(x))$
Några filosofer är smarta.

Vad hade hänt om vi kombinerade tvärtom?

översättning

(26) $\forall x(\textsc{människa}(x) \rightarrow \textsc{dödlig}(x))$
Alla människor är dödliga.

(27) $\exists x(\textsc{filosof}(x) \wedge \textsc{smart}(x))$
Några filosofer är smarta.

Vad hade hänt om vi kombinerade tvärtom?

(28) $\forall x(\textsc{människa}(x) \wedge \textsc{dödlig}(x))$
Alla är människor och dödliga.

(29) $\exists x(\textsc{filosof}(x) \rightarrow \textsc{smart}(x))$
Några är smarta om de är filosofer.

översättning

Predikatlogiken kan även påståenden av typen ”Inga A är B”: dessa uttrycks genom att sätta en negation framför ett ”några A är B”-påstående.

(30) $\neg\exists x(\textsc{djur}(x) \wedge \textsc{logiker}(x))$
Inga djur är logiker.
(Jfr: *Det är inte fallet att: några djur är logiker.*)

Vi kan även sätta negation framför “alla A är B”-påståenden:

(31) $\neg\forall x(\textsc{djur}(x) \rightarrow \textsc{logiker}(x))$
Inte alla djur är logiker.
Jfr: *Det är inte fallet att: alla djur är logiker.*